PODSTAWY ROBOTYKI

Opracował: dr hab. inż. Adam Rogowski

Autor wykładu:

dr hab. inż. Adam Rogowski
pok. ST 405
adam.rogowski@pw.edu.pl

Literatura:

- **Treść niniejszego wykładu dostępna na:**
  https://www.zaios.pw.edu.pl/zaios-site/pl/dydaktyka
  albo:
  www.cim.pw.edu.pl/lzp
- **J. Craig: Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie, WNT, Warszawa 1995**
- **J. Honczarenko: Roboty przemysłowe. Budowa i zastosowanie, WNT, Warszawa 2010**

Efekty kształcenia:

- Zapoznanie się studentów z wiedzą z zakresu podstaw budowy i programowania robotów przemysłowych. Poznanie podstaw teoretycznych kinematyki robotów i metod obliczania transformacji prostej i odwrotnej. Nabycie wiedzy na temat sterowania robotów i podstawowych umiejętności programowania.
- Student ma uporządkowaną, pobudowaną teoretycznie wiedzę ogólną w zakresie rodzajów robotów, ich cech charakterystycznych oraz głównych elementów składowych, metod opisu położenia i orientacji brył sztywnych, kinematyki robotów, wyznaczania trajektorii, a także podstaw programowania robotów i języków programowania robotów.

Treść wykładu:

- Rys historyczny rozwoju robotyki, prawa robotyki. Definicje podstawowe i terminologia: pojęcie robota, człony i pary kinematyczne, ruchliwość, manewrowość, przestrzeń robocza, dokładność i powtarzalność pozycjonowania, transformacja prosta i odwrotna.
- Klasyfikacja robotów pod względem kinematyki, sterowania, programowania i komunikacji z otoczeniem (generacje robotów). Typowe struktury kinematyczne robotów przemysłowych stacjonarnych, osie zewnętrzne robotów.
- Notacja Denavita-Hartenberga i jej zastosowanie do opisu struktur kinematycznych robotów. Zapis typowych struktur kinematycznych w notacji Denavita-Hartenberga. Opis kinematyki robota w komputerowym systemie modelowania robotów.
- Metody programowania robotów i zakresy ich zastosowania, programowanie przez nauczanie, programowanie off-line: zalety i wady. Przykład języka programowania robotów, współrzędnościowe programowanie robotów.
- Układy współrzędnych, różne metody opisu położenia kątowego, macierzowy zapis odwzorowania układów współrzędnych. Określenie położenia punktu TCP w układzie współrzędnych podstawy robota na podstawie zapisu kinematyki w notacji Denavita-Hartenberga.

Treść wykładu – c.d.:

- Algorytmy realizacji instrukcji pozycjonowania. Generowanie trajektorii, planowanie trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych, zastosowanie wielomianów 3-go stopnia w planowaniu trajektorii, algorytmy heurystyczne, zachowanie ciągłości przyspieszenia przy planowaniu trajektorii. Wykorzystanie funkcji liniowej łączonej z fragmentami parabolicznymi przy planowaniu trajektorii.
- Transformacja wektora prędkości, przenoszenie prędkości przez człony kinematyczne, rozwiązanie prostego zadania kinematyki dla prędkości.
- Zastosowanie macierzy Jacobiego (jakobianów) w robotyce, metody wyznaczania jakobianów, rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki dla prędkości, osobliwości.
- Siły statyczne w manipulatorach, zastosowanie macierzy Jacobiego do obliczania sił i momentów napędowych, osobliwości a siły statyczne.
- Przesłanki stosowania robotów w przemyśle, typowe zadania robotów przemysłowych, specyfika robotów używanych do różnych zadań technologicznych.

Metody i kryteria oceniania:

- Warunkiem zaliczenia przedmiotu jest ocena co najmniej 3.0 zarówno z wykładu (egzamin) jak i z laboratorium. Ocena końcowa wystawiana jest wówczas w następujący sposób na podstawie średniej arytmetycznej z tych ocen:

  3,00 – 3,25 >>> 3,0

  3,26 – 3,75 >>> 3,5

  3,76 – 4,25 >>> 4,0

  4,26 – 4,75 >>> 4,5

  4,76 i więcej >>> 5,0
- Podczas egzaminu nie jest dozwolone korzystanie z urządzeń elektronicznych.
- Uczestnictwo w egzaminie w kolejnym terminie wiąże się z anulowaniem oceny otrzymanej w terminie poprzednim.

Metody i kryteria oceniania – c.d.:

- Zajęcia laboratoryjne składają się z szeregu ćwiczeń. Z każdego ćwiczenia otrzymuje się ocenę cząstkową.
- W przypadku nieobecności usprawiedliwionej (zwolnienie lekarskie) dane ćwiczenie nie jest brane pod uwagę przy obliczaniu oceny końcowej (chyba, że nieobecność dotyczy tylko części ćwiczenia: wtedy prowadzący obniża kryteria oceny dla danego ćwiczenia).
- Nieobecność (nawet usprawiedliwiona) na 6 i więcej godzinach lekcyjnych, a także nieobecność nieusprawiedliwiona na którymkolwiek ćwiczeniu laboratoryjnym oznacza niezaliczenie laboratorium.
- Z powyższymi zastrzeżeniami, ocena z laboratorium jest zaokrągloną ważoną średnią arytmetyczną punktów odpowiadających ocenom ze wszystkich ćwiczeń, przy czym cząstkowej ocenie niedostatecznej (2.0) odpowiada 0 (zero) punktów.
- Jeśli obliczona ważona średnia arytmetyczna jest niższa od 3.0, to zaokrągla się ją w dół do 2.0 (ocena końcowa niedostateczna).
- Wagi poszczególnych ocen cząstkowych są równe liczbie dwugodzinnych zajęć laboratoryjnych, na których odbywa się dane ćwiczenie.

Rys historyczny rozwoju robotyki

Historia robotyki (budowa mechanizmów próbujących naśladować ruchy organizmów żywych)

- **Mechaniczne zabawki (starożytna Grecja)**
- **Androidy (okres średniowiecza)**
- **Maszyny z napędem elektrycznym wyposażone w „zmysły”**

Etymologia słowa „robot”:

Karel Čapek – „Roboty Uniwersalne Rossuma”

Prawa robotyki (Isaac Asimov):

1. **Robot nie może zranić człowieka, ani dopuścić przez zaniechanie do wyrządzenia mu szkody**
2. **Robot musi być posłuszny człowiekowi, za wyjątkiem sytuacji, gdy byłoby to sprzeczne z prawem 1**
3. **Robot musi chronić swoją egzystencję, za wyjątkiem przypadków, gdy byłoby to sprzeczne z prawem 1 lub 2**

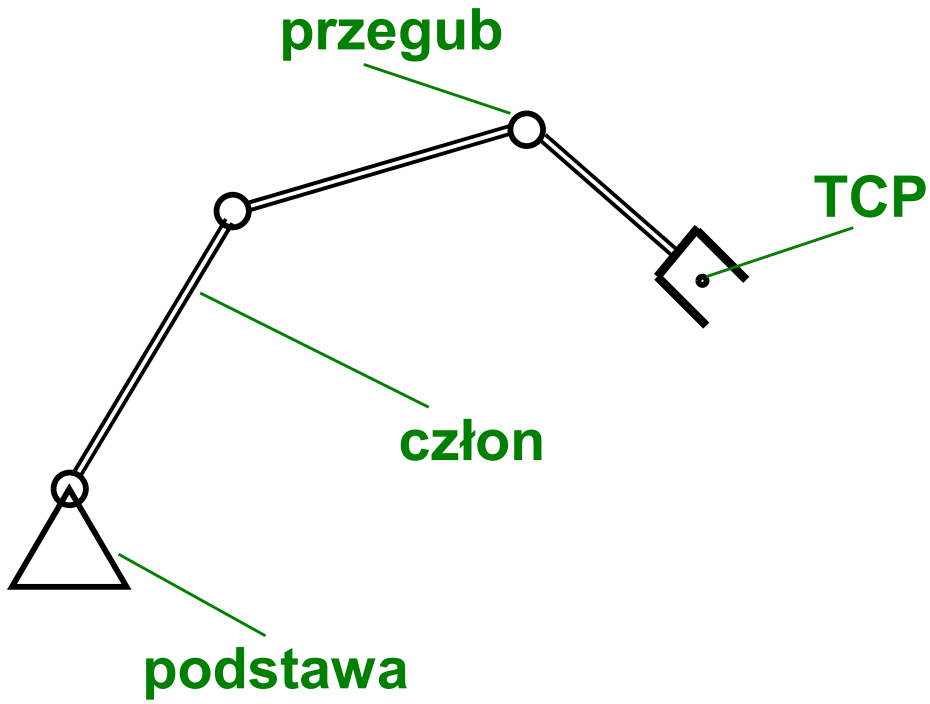
Roboty przemysłowe – pojęcia podstawowe

Robot przemysłowy:

- **Maszyna manipulacyjna o wielu stopniach swobody, realizująca w pewnym zakresie funkcje charakterystyczne dla górnych kończyn człowieka, a czasem mająca również zdolności lokomocyjne**
- **Maszyna wielozadaniowa (uniwersalna) i programowalna, a więc mogąca realizować wiele różnych sekwencji czynności manipulacyjnych**

Manipulator składa się z członów tworzących łańcuch kinematyczny otwarty.

Sąsiadujące ze sobą człony są połączone za pomocą par kinematycznych (przegubów).



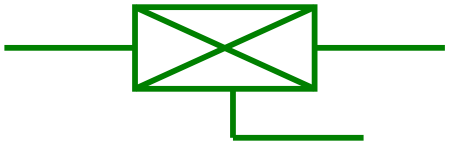
Pojęcia podstawowe – c.d.

Numer klasy pary kinematycznej – liczba więzów nałożonych przez połączenie między dwoma członami.

Pary kinematyczne V klasy:

przegub obrotowy

przegub translacyjny



Ruchliwość – liczba stopni swobody manipulatora z unieruchomioną podstawą (odpowiada liczbie więzów, które trzeba by nałożyć, aby go całkowicie unieruchomić):

$$w = 6 \cdot n - \sum_{i=1}^{5} i \cdot p_i$$

n – liczba członów ruchomych

p_i – liczba par kinematycznych klasy „i”

Pojęcia podstawowe – c.d.

Manewrowość – liczba stopni swobody manipulatora z unieruchomioną podstawą i ostatnim członem w łańcuchu kinematycznym

Przestrzeń robocza – zbiór punktów przestrzeni, które może osiągnąć końcówka robocza (efektor)

Przestrzeń robocza manipulacyjna – punkty osiągane z dowolną orientacją kątową

Przestrzeń robocza osiągalna – punkty osiągane przynajmniej z jedną orientacją kątową

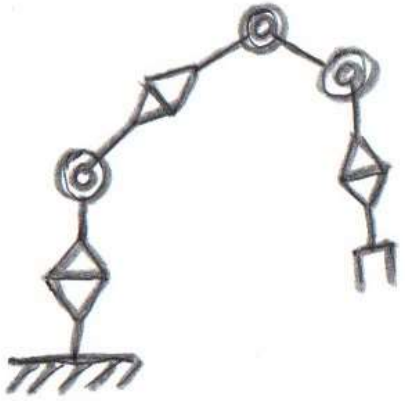
Powtarzalność manipulatora – dokładność, z jaką manipulator może powrócić do punktu zapamiętanego poprzednio metodą nauczania

Dokładność manipulatora – dokładność, z jaką manipulator może osiągnąć punkt o zadanych współrzędnych

Pojęcia podstawowe – c.d.

Proste zadanie kinematyki (transformacja prosta) – jego rozwiązanie polega na określeniu położenia końcówki roboczej przy zadanej konfiguracji poszczególnych przegubów. Proste zadanie kinematyki ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie

Odwrotne zadanie kinematyki (transformacja odwrotna) – jego rozwiązanie polega na określeniu konfiguracji wszystkich przegubów przy założonym położeniu końcówki roboczej. Może mieć różną liczbę rozwiązań.



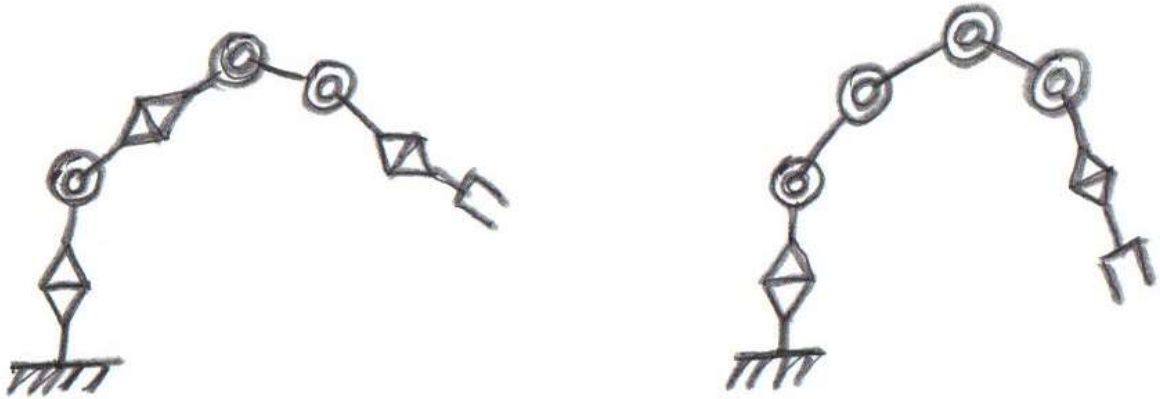
Odwrotne zadanie kinematyki

Metody rozwiązywania odwrotnego zadania kinematyki:

- **algebraiczne i geometryczne (możliwe do zastosowania, gdy jest rozwiązanie w postaci jawnej) – charakteryzują się dużą szybkością obliczeń**
- **numeryczne – nie muszą zapewnić znalezienia wszystkich rozwiązań**

Warunek istnienia rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki w postaci jawnej dla manipulatora o 6 przegubach obrotowych:

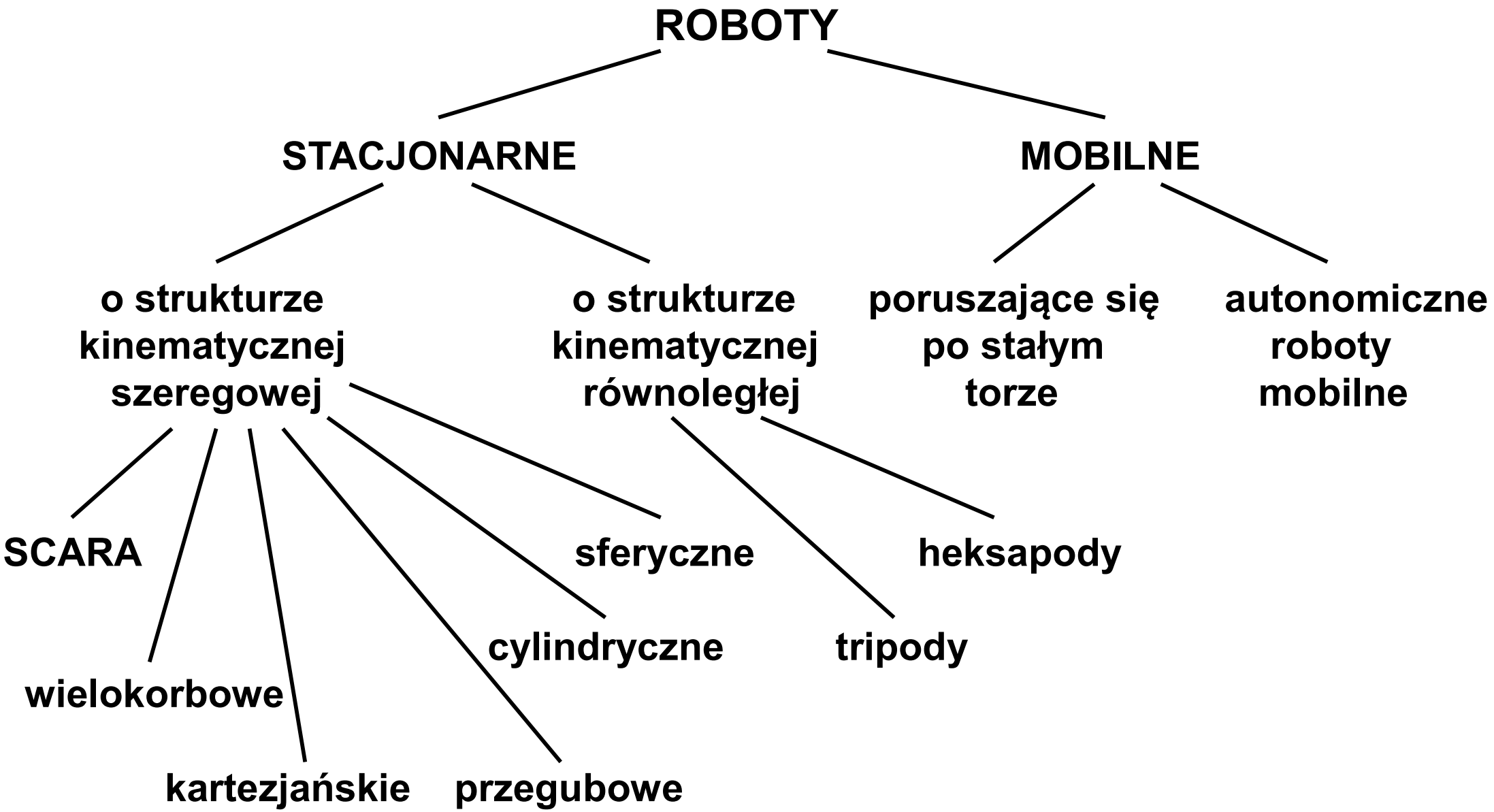
Osie trzech sąsiednich przegubów przecinają się w jednym punkcie bądź są do siebie równoległe.



Klasyfikacja robotów przemysłowych

- **Pod względem struktury kinematycznej**
- **Pod względem sterowania**
- **Pod względem sposobu programowania i komunikacji z otoczeniem**

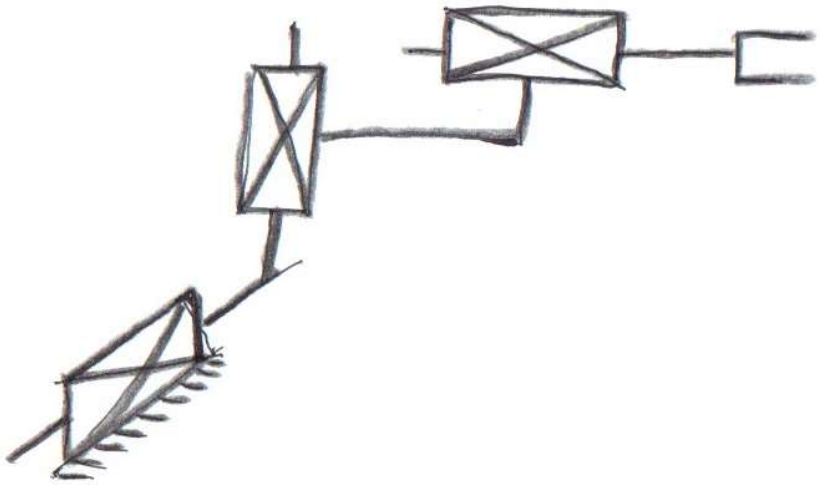
Klasyfikacja robotów przemysłowych pod względem struktury kinematycznej



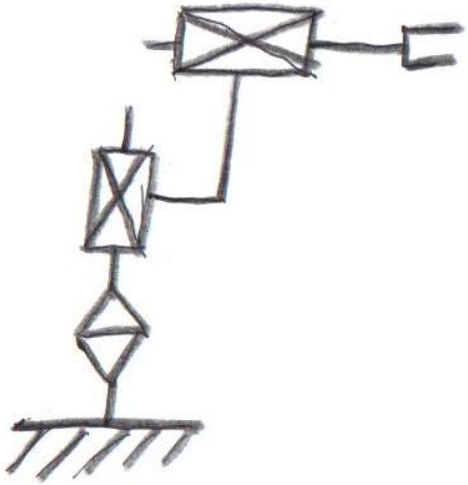
Struktury kinematyczne robotów stacjonarnych

Robot kartezjański:

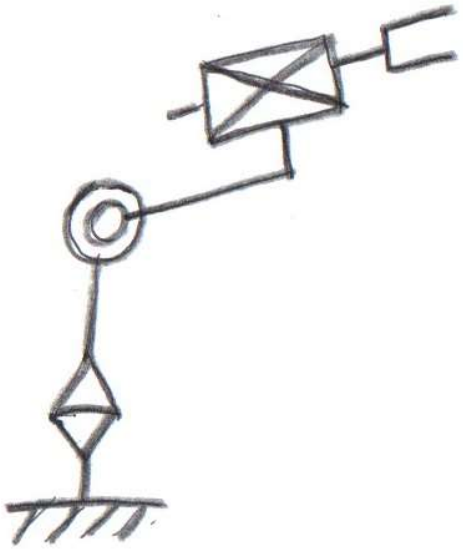
(przestrzeń robocza
o kształcie
prostopadłościanu)



Robot cylindryczny:

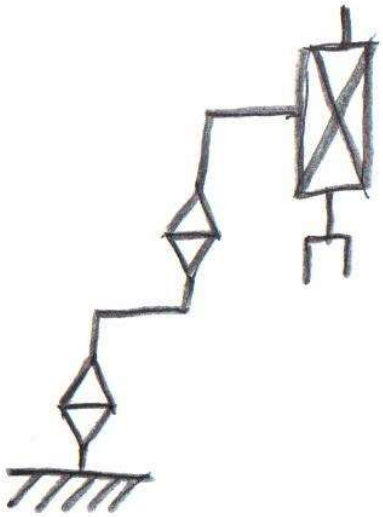


Robot sferyczny:

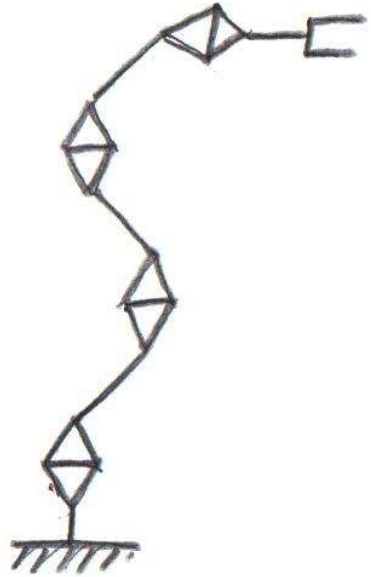


Struktury kinematyczne robotów stacjonarnych – c.d.

SCARA
(Selectively Compliant Assembly Robot Arm)

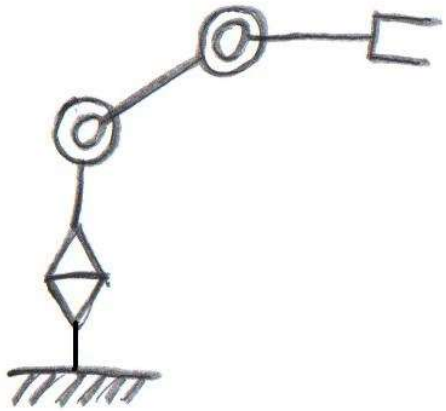


Robot wielokorbowy:



Robot przegubowy
(antropomorficzny)

Odmiana: PUMA (Programmable Universal Manipulator for Assembly)



Osie zewnętrzne robotów

Osie zewnętrzne robotów – odrębne napędy lub maszyny manipulacyjne, zdolne do pracy w pełni zsynchronizowanej z ruchami robota, sterowane najczęściej w oparciu o ten sam program użytkowy, co jego napędy własne.

- **Cel stosowania osi zewnętrznych:**
  - **Zwiększenie zasięgu robota**
  - **Rozwiązanie problemu ograniczeń dostępu do miejsc obróbki i zapewnienie wymaganej orientacji przestrzennej narzędzia**
- **Przykłady osi zewnętrznych:**
  - **Tory jezdne robotów**
  - **Pozycjonery (np. przy zrobotyzowanym spawaniu)**

Klasyfikacja robotów przemysłowych – c.d.

Pod względem sterowania (4 klasy):

- **Robot sekwencyjny – wyposażony w sekwencyjny układ sterowania (wykonujący kolejno zaprogramowane ruchy i czynności)**
- **Robot realizujący zadane trajektorie – wg instrukcji pozycjonowania określających pozycje i prędkość**
- **Robot adaptacyjny – dostosowujący swoje działanie do informacji pochodzących z różnego rodzaju czujników**
- **Teleoperator – sterowany zdalnie albo przez człowieka-operatora albo przez komputer)**

Klasyfikacja robotów przemysłowych – c.d.

Pod względem sposobu programowania i komunikacji z otoczeniem (3 generacje):

- **Roboty nauczane**

  Na ogół nie wyposażone w czujniki. Operują na jednoznacznie określonych obiektach o ściśle określonym położeniu. Programowanie sekwencyjne lub przez nauczanie

- **Roboty uczące się**

  Wyposażone w sensory dotyku i/lub obrazu. Operują na różnych obiektach (choć na ogół obiektach określonego typu), które mogą się znajdować w różnym położeniu. Programowanie przez nauczanie z elementami adaptacyjnymi.

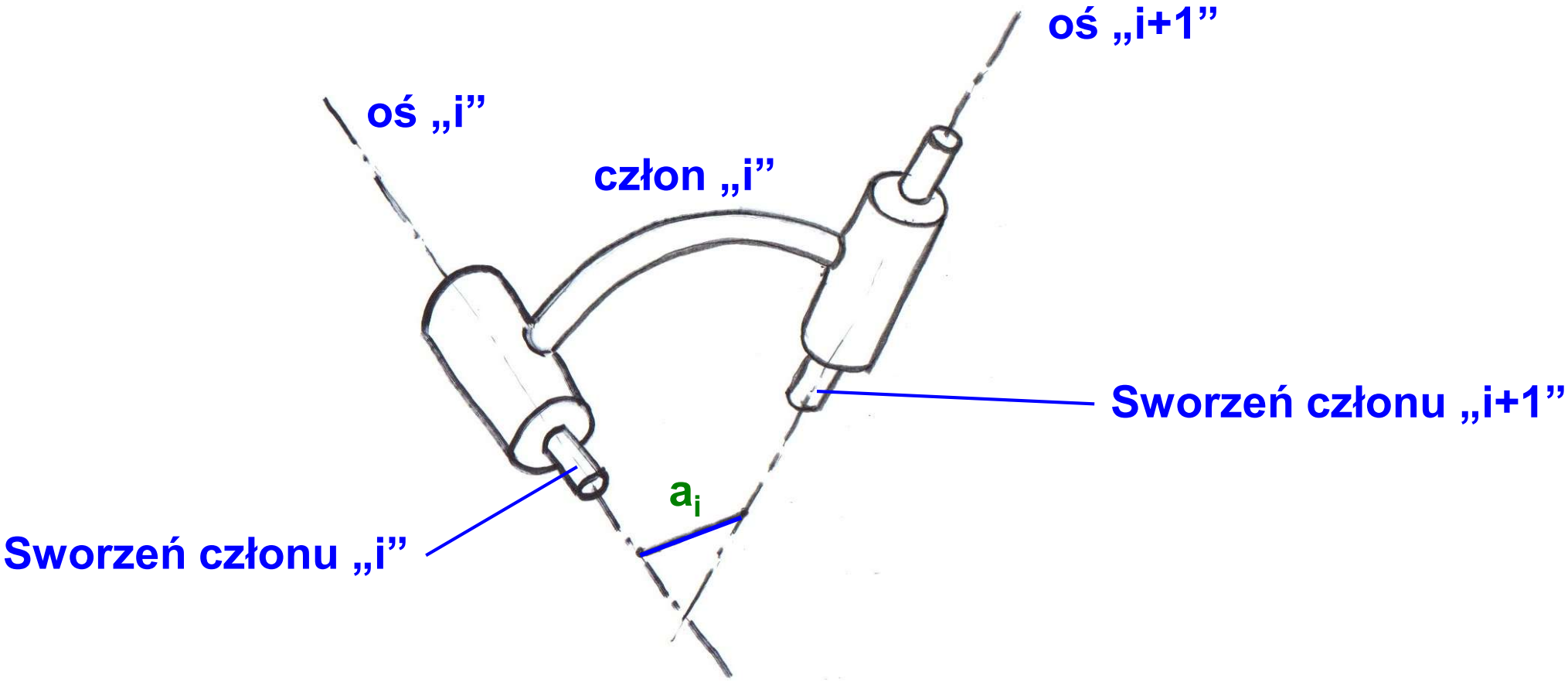
- **Roboty inteligentne**

  Operują na zróżnicowanych obiektach o położeniu zmiennym w czasie. Wykorzystują także inne sensory niż odpowiadające zmysłom wzroku i dotyku. Programowanie w języku (quasi-) naturalnym.

Notacja Denavita-Hartenberga

Założenie: robot posiada tylko przeguby rotacyjne i translacyjne

Geometria pojedynczego członu „i” robota jednoznacznie determinuje wzajemne położenie osi „i” oraz „i+1” jego przegubów:

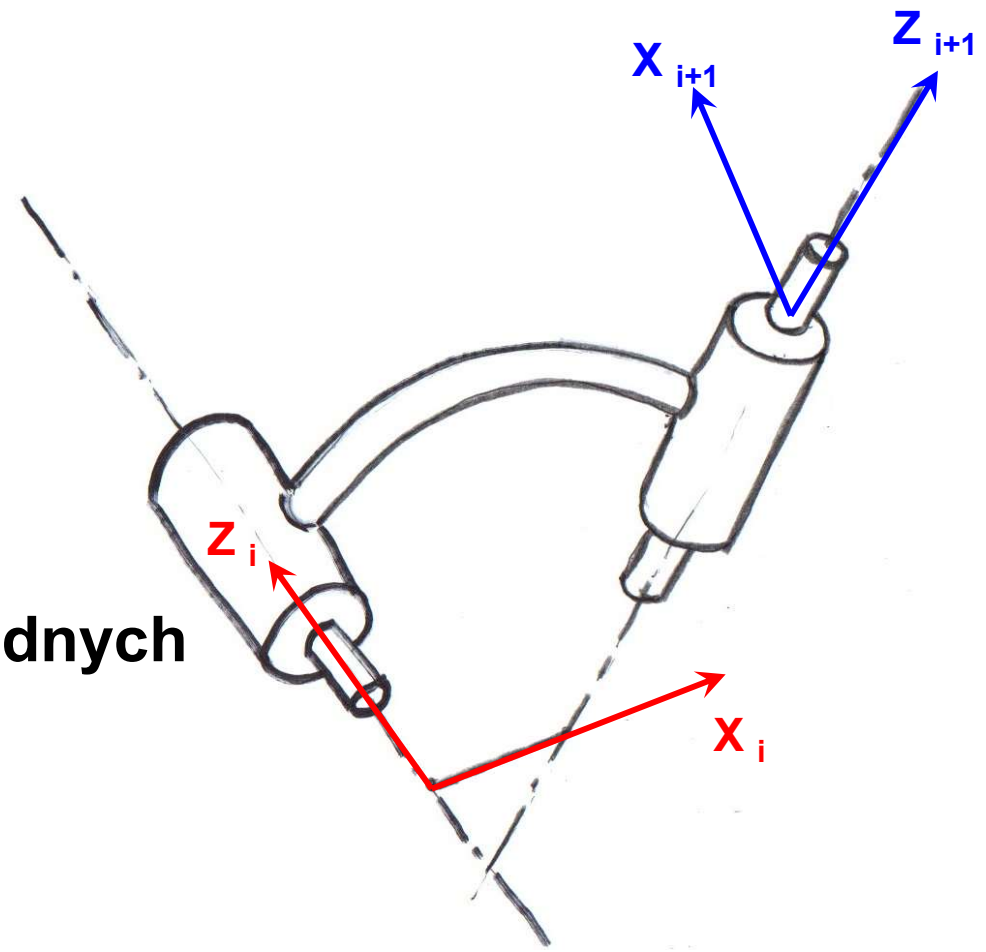


a_i – odległość między osiami „i” oraz „i+1” (odcinek o długości a_i jest prostopadły zarówno do osi „i” jak też osi „i+1”)

Notacja Denavita-Hartenberga – c.d.

Każdemu członowi przypisany jest układ współrzędnych $X_iY_iZ_i$ zgodnie z następującymi zasadami:

- **Oś Z_i pokrywa się z osią przegubu „i”**
- **Oś X_i pokrywa się z najkrótszym odcinkiem prostej łączącym osie „i” oraz „i+1” (tym, wzdłuż którego oblicza się odległość a_i)**
- **Położenie osi Y_i determinuje się na podstawie faktu, że układ współrzędnych $X_iY_iZ_i$ jest układem prawoskrętnym**



Notacja Denavita-Hartenberga – c.d.

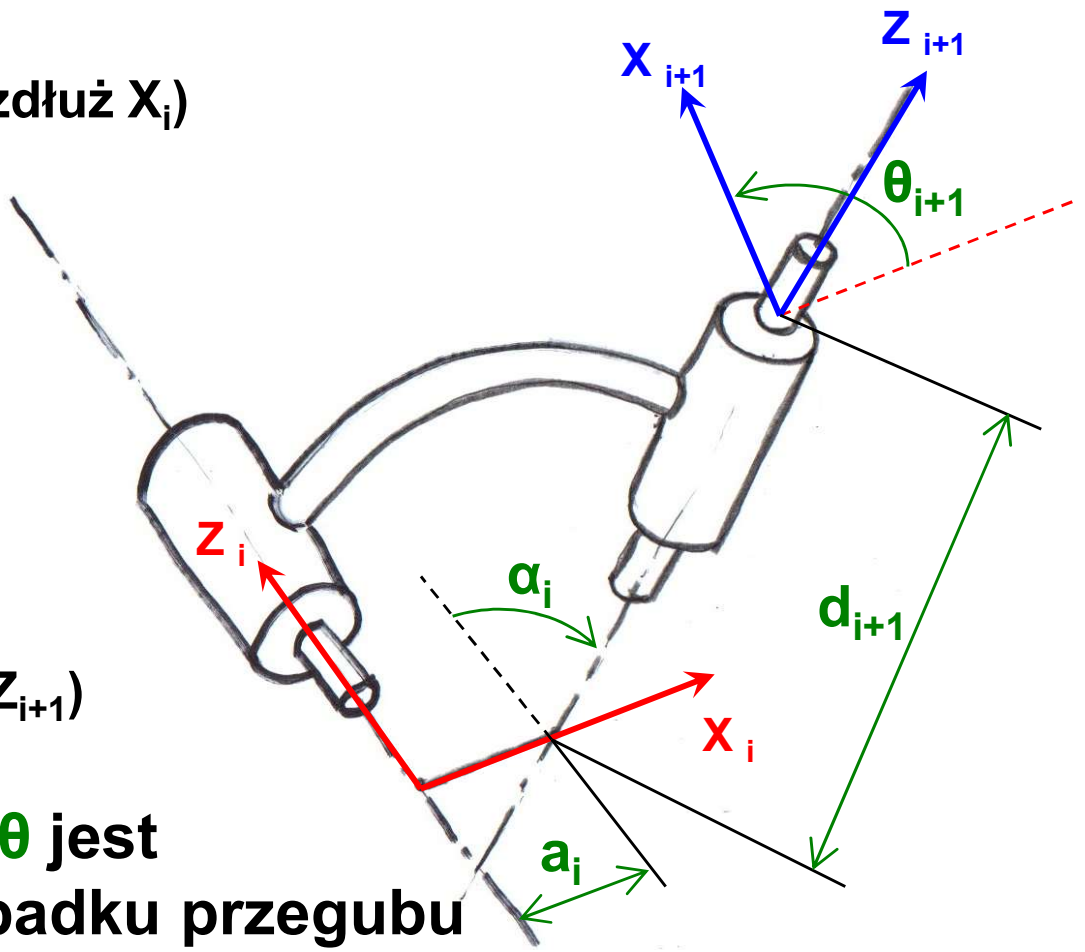
Położenie członu „i+1” względem członu „i” jest opisane za pomocą parametrów Denavita-Hartenberga:

- a_i – **długość członu „i”**
  (odległość między Z_i i Z_{i+1} mierzona wzdłuż X_i)

- α_i – **kąt skręcenia członu „i”**
  (kąt między Z_i i Z_{i+1} mierzony wokół X_i)

- d_{i+1} – **odsunięcie członu „i+1”**
  (odległość między X_i i X_{i+1} mierzona wzdłuż Z_{i+1})

- θ_{i+1} – **kąt konfiguracji członów**
  (kąt między X_i i X_{i+1} mierzony wokół Z_{i+1})



W przypadku przegubu obrotowego θ jest zmienną konfiguracyjną, zaś w przypadku przegubu translacyjnego zmienną konfiguracyjną jest d. Pozostałe parametry Denavita-Hartenberga dla danego członu są stałymi wartościami.

Notacja Denavita-Hartenberga – c.d.

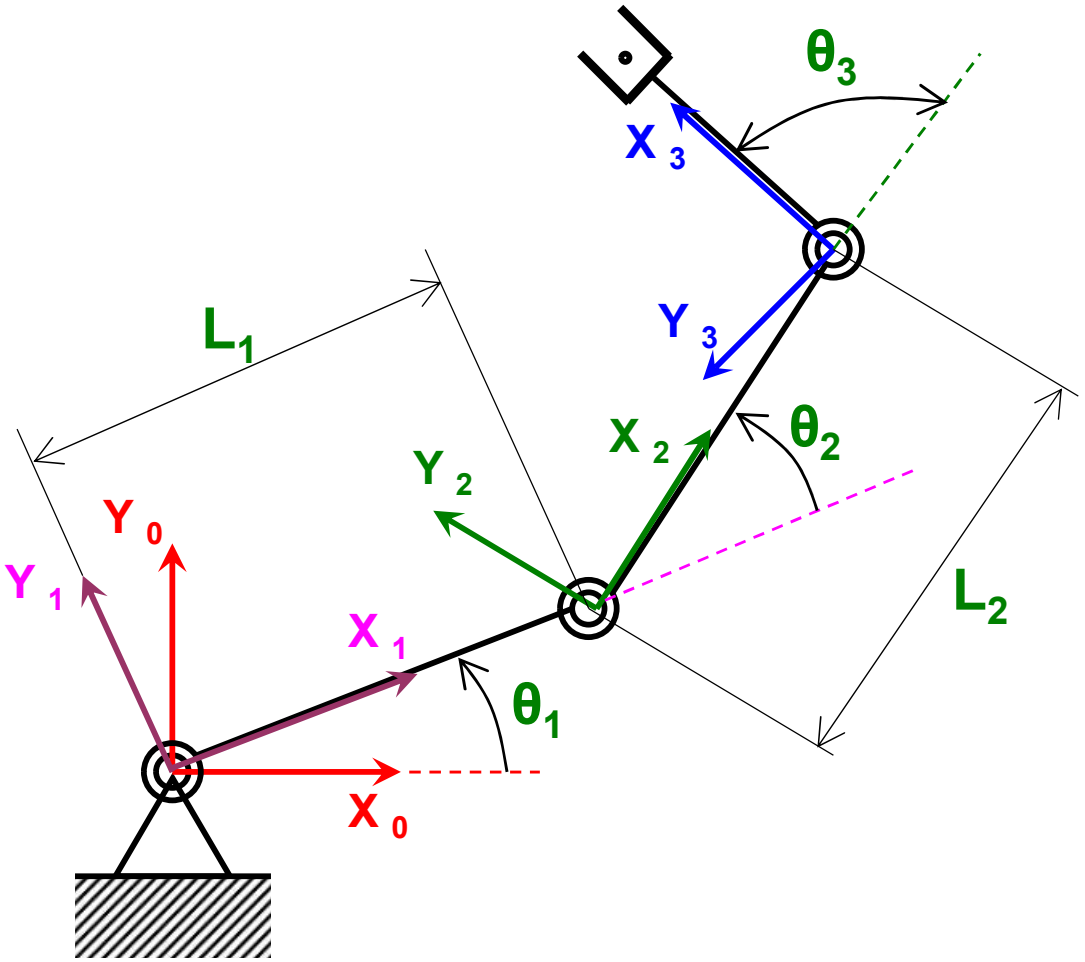
Dla pierwszego połączenia ruchowego w łańcuchu (nieruchoma podstawa, czyli człon „0”, oraz człon „1”) zazwyczaj przyjmuje się:

- Dla pary przesuwnej: $a_0 = 0 \quad \alpha_0 = 0^o \quad \theta_1 = 0^o$

- Dla pary obrotowej: $a_0 = 0 \quad \alpha_0 = 0^o \quad d_1 = 0$

Położenie układu współrzędnych „1” zazwyczaj pokrywa się z położeniem układu „0” dla zerowej wartości zmiennej konfiguracyjnej układu „1”

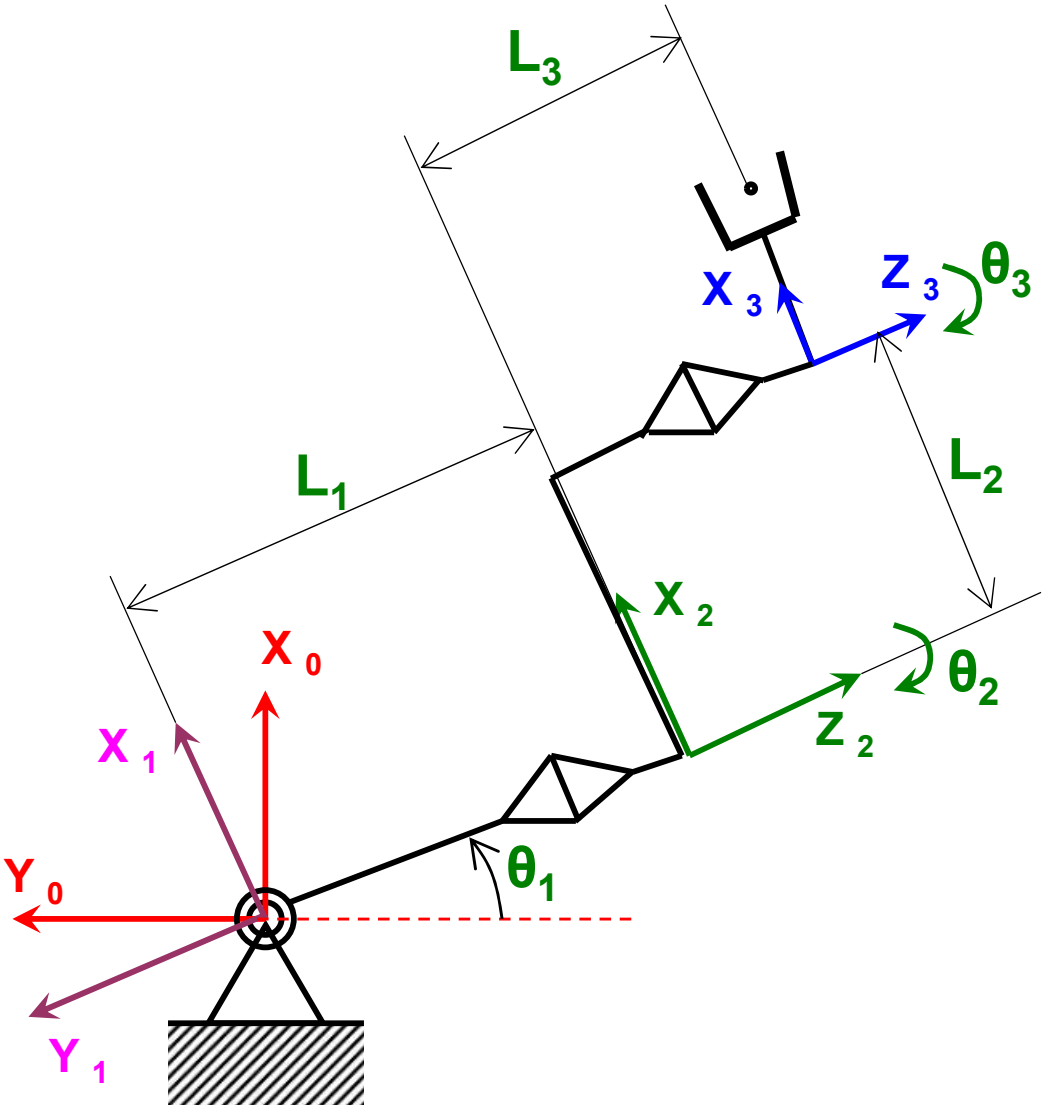
Notacja Denavita-Hartenberga – przykład 1



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0º	0	θ_1
2	L_1	0º	0	θ_2
3	L_2	0º	0	θ_3

Zmienne konfiguracyjne oznaczono kolorem czerwonym

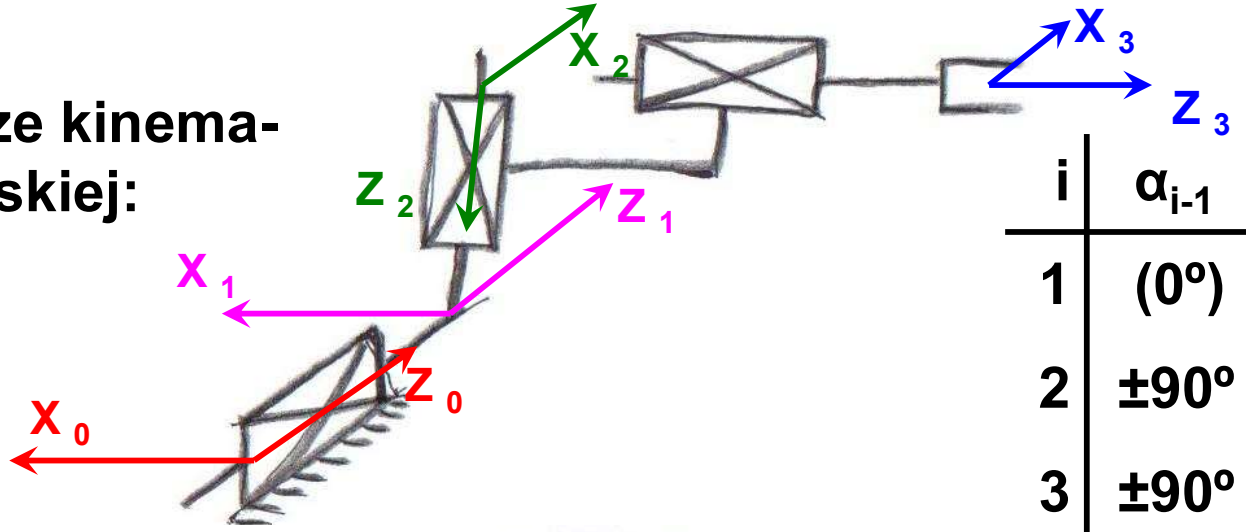
Notacja Denavita-Hartenberga – przykład 2



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0º	0	θ_1
2	0	90º	L_1	θ_2
3	L_2	0º	L_3	θ_3

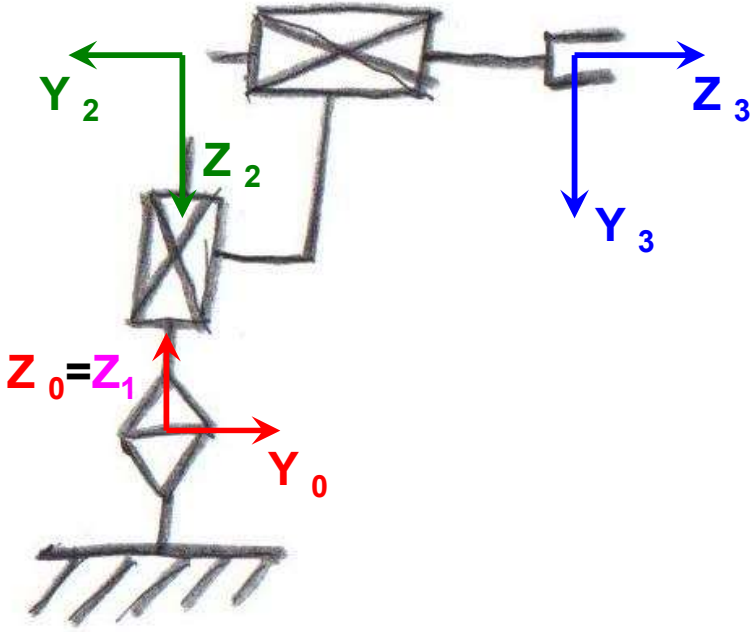
Zapis typowych struktur kinematycznych w notacji Denavita-Hartenberga

Robot o strukturze kinematycznej kartezjańskiej:



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	(0°)	(0)	d_1	(0)
2	±90°	(0)	d_2	±90°
3	±90°	(0)	d_3	(0)

Robot o strukturze kinematycznej cylindrycznej:



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	(0°)	(0)	(0)	θ_1
2	0/180°	(0)	d_2	(0)
3	±90°	(0)	d_3	(0)

Inne struktury (SCARA, przegubowa, sferyczna) – proszę się zastanowić samodzielnie.

Notacja Denavita-Hartenberga dla robota Movemaster

Zasady opisu kinematyki robota w systemie modelowania

Powiązania kinematyczne pomiędzy członami opisuje się w procedurze o nazwie „kinematics”. Powiązanie członu z członem bezpośrednio go poprzedzającym w łańcuchu kinematycznym opisywane jest za pomocą instrukcji NEXT JOINT, mającej postać:

NEXT JOINT (<Nazwa członu dołączanego> ,<Nazwa członu odniesienia>)

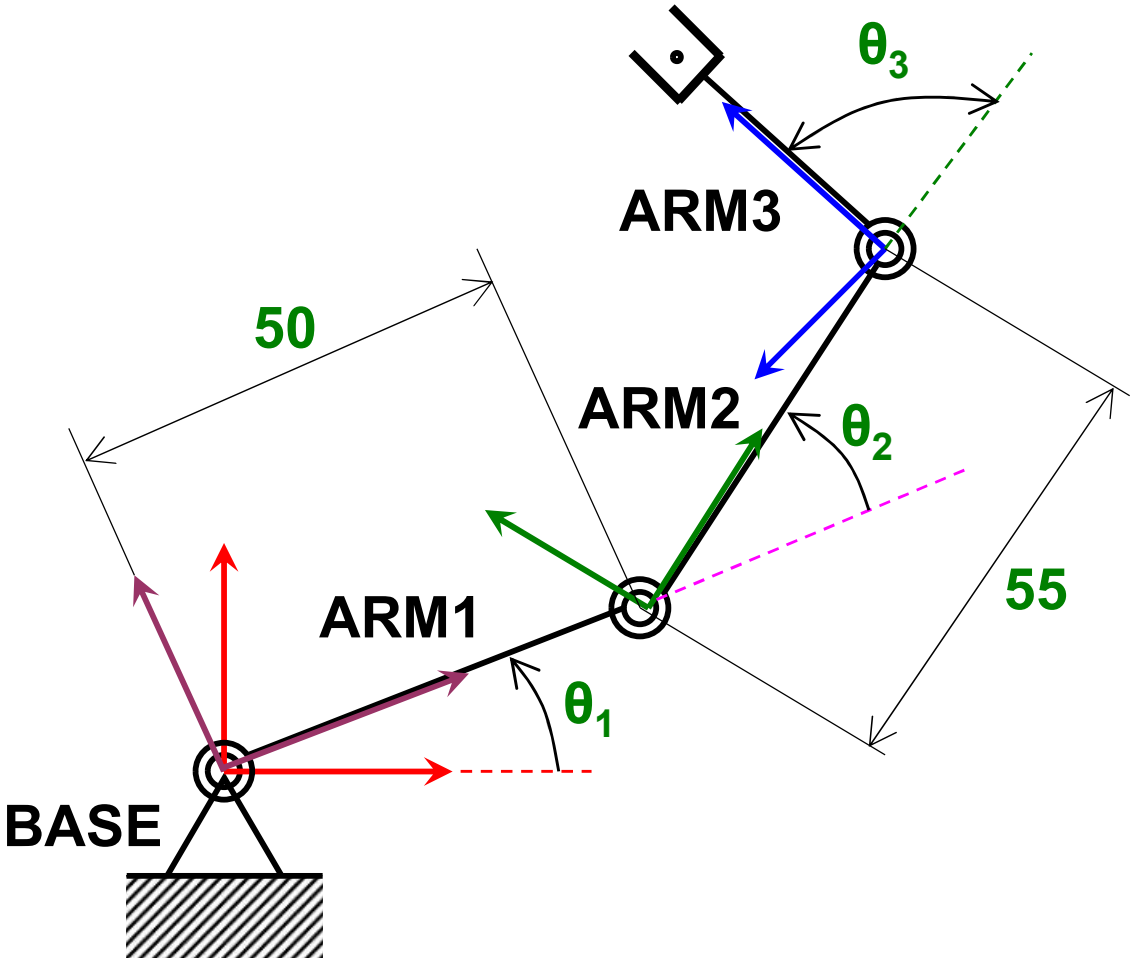
Po instrukcji NEXT JOINT następuje zapis parametrów Denavita-Hartenberga opisujących położenie układu współrzędnych członu dołączanego w stosunku do układu współrzędnych członu odniesienia:

DH NOTATION (a, α, d, θ)

Zmienną konfiguracyjną określa się za pomocą specjalnej funkcji t()

Zasady opisu kinematyki robota w systemie modelowania – c.d.

Przykład:



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0º	0	0	θ_1
2	0º	50	0	θ_2
3	0º	55	0	θ_3

```
PROCEDURE KINEMATICS
NEXT JOINT (ARM1, BASE)
DH NOTATION (0, 0, 0, t() )
NEXT JOINT (ARM2, ARM1)
DH NOTATION ( 50, 0, 0, t() )
NEXT JOINT (ARM3, ARM2)
DH NOTATION ( 55, 0, 0, t() )
ENDPROC
```

Zasady opisu kinematyki robota w systemie modelowania – c.d.

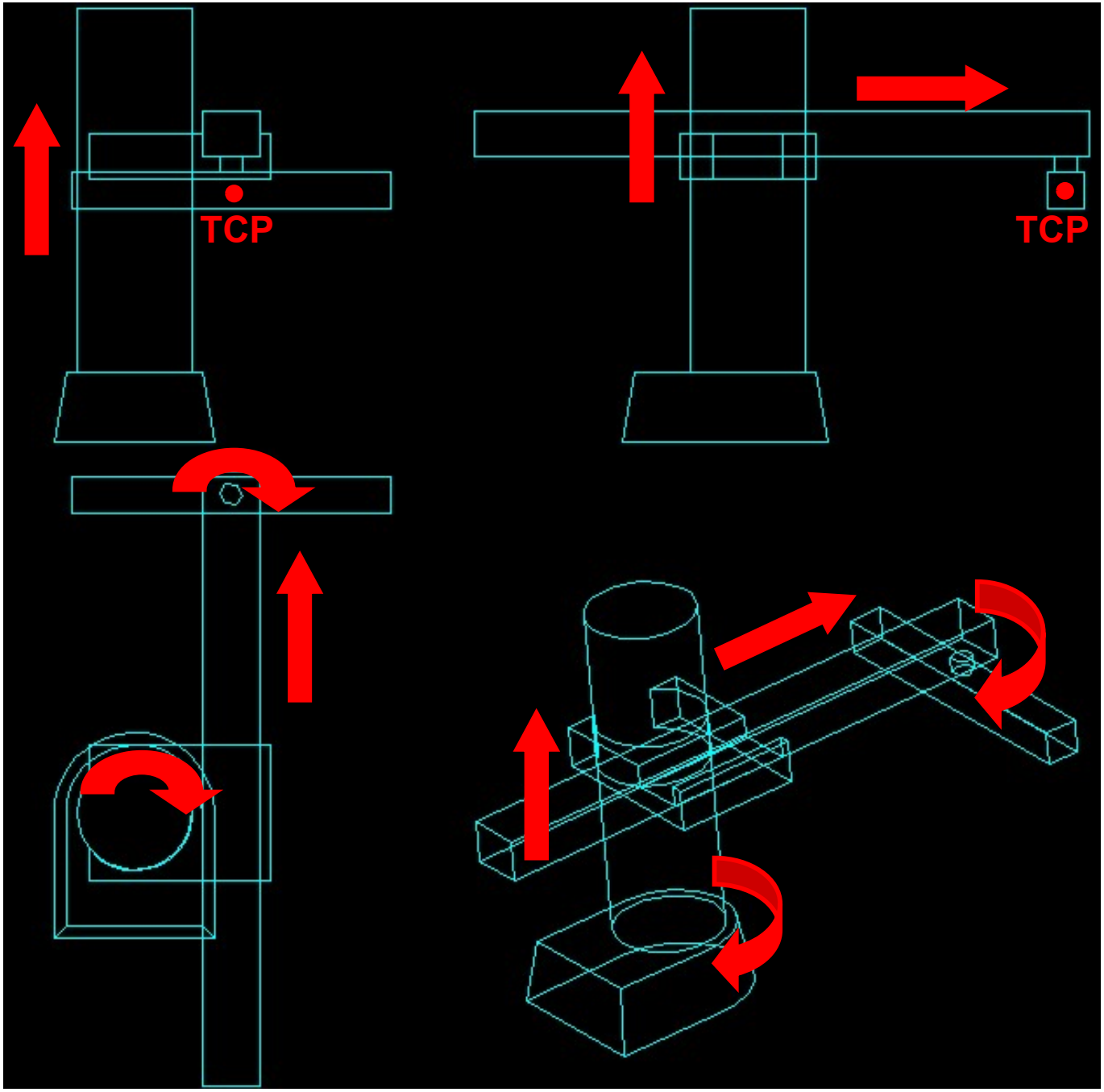
Opcjonalnie można określić zakresy przemieszczeń poszczególnych przegubów poprzez dodanie w instrukcji NEXT JOINT trzech parametrów określających kolejno:

- **wartość minimalną zmiennej konfiguracyjnej**
- **wartość maksymalną zmiennej konfiguracyjnej**
- **wartość początkową zmiennej konfiguracyjnej**

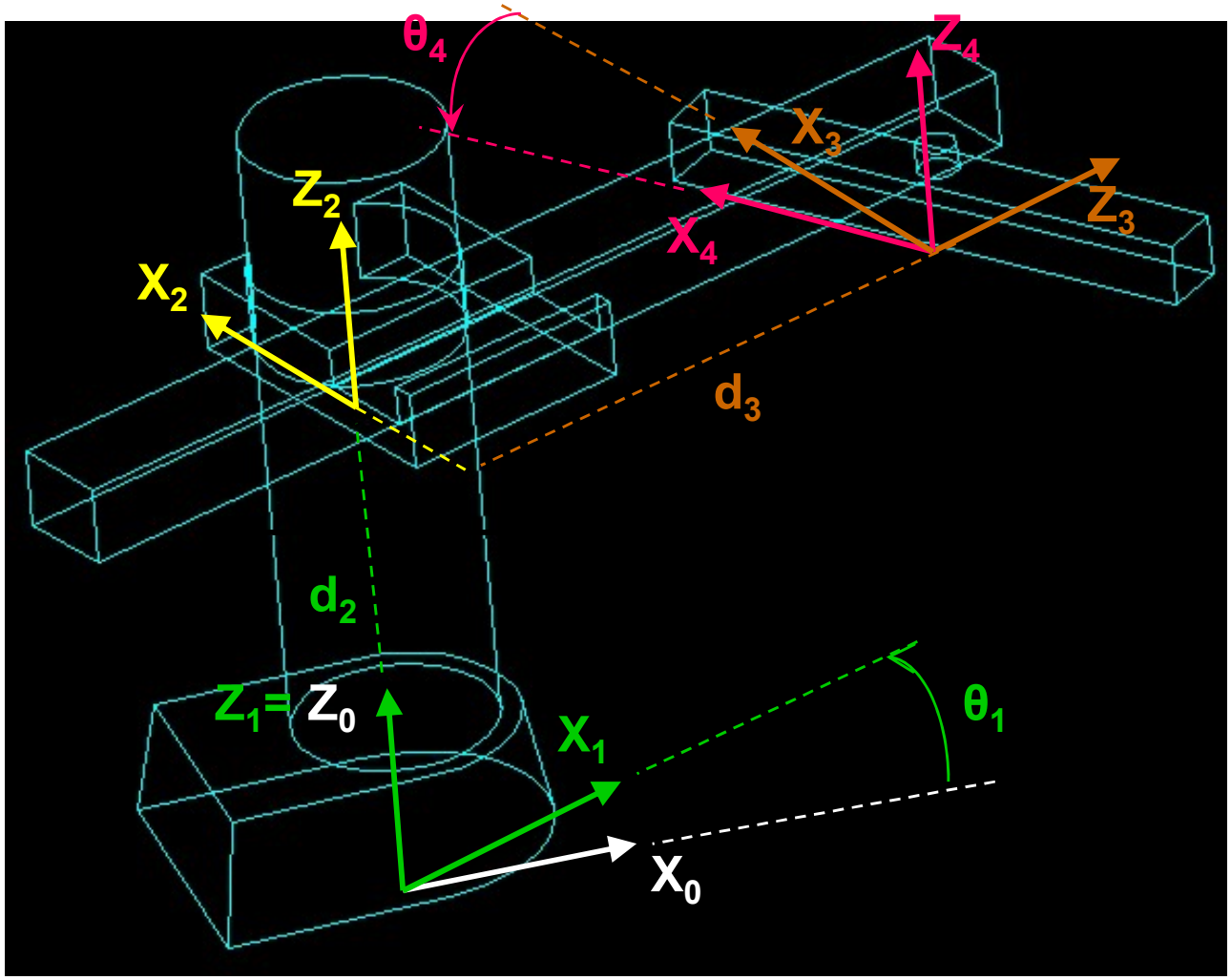
Przykład:

```
PROCEDURE KINEMATICS
NEXT JOINT (ARM1, BASE, 0°, 180°, 30°)
DH NOTATION (0, 0, 0, t() )
NEXT JOINT (ARM2, ARM1, -90°, 90°, 30°)
DH NOTATION ( 50, 0, 0, t() )
NEXT JOINT (ARM3, ARM2, -90°, 90°, 80°)
DH NOTATION ( 55, 0, 0, t() )
ENDPROC
```

Opis kinematyki przykładowego robota



Opis kinematyki przykładowego robota – c.d.



i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0º	0	θ_1
2	0	0º	d_2	90º
3	- 42.5	90º	d_3	0º
4	0	-90º	0	θ_4

```
procedure kinematics
next joint(column,base,-150°,150°,0°)
dh notation(0,0,0,t())
next joint(slider,column,70,160,130)
dh notation(0,0,t(),90°)
next joint(arm,slider,40,230,140)
dh notation(-42.5,90°,t(),0)
next joint(efector,arm,-180°,180°,0°)
dh notation(0,-90°,0,t())
endproc
```

Zasady zapisu algorytmu realizacji instrukcji pozycjonowania w systemie modelowania

Realizacja ruchu chwytaka robota następuje w wyniku złożenia przemieszczeń poszczególnych członów robota.
W systemie modelowania przemieszczenia złożone zapisuje się w pętli REPEAT ... UNTIL DONE().
Pętla ta zawiera szereg wywołań procedury MOVE określającej przemieszczenia elementarne poszczególnych członów w czasie, składające się na ruch złożony:

```
REPEAT
    MOVE ( <nazwa członu> , <przyrost zmiennej konfiguracyjnej członu w funkcji czasu> )
    MOVE ( <nazwa członu> , <przyrost zmiennej konfiguracyjnej członu w funkcji czasu> )
    …
    MOVE ( <nazwa członu> , <przyrost zmiennej konfiguracyjnej członu w funkcji czasu> )
UNTIL DONE ( )
```

Zasady zapisu algorytmu realizacji instrukcji pozycjonowania w systemie modelowania – c.d.

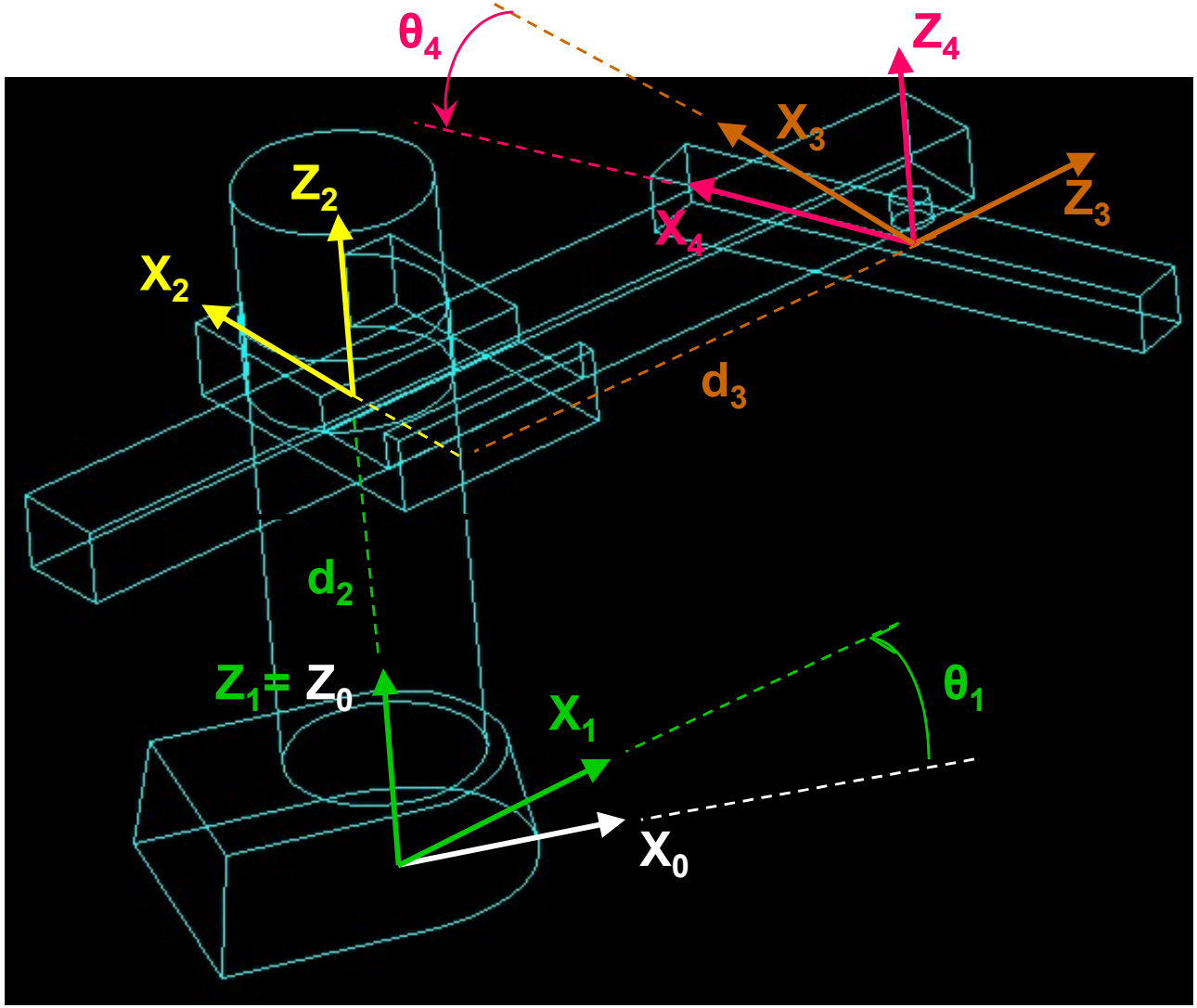
Przyrosty zmiennych konfiguracyjnych określa się w funkcji czasu znormalizowanego do zakresu <0,1>. Aktualna wartość tego czasu jest zwracana przez funkcję L().
Zatem w momencie rozpoczęcia ruchu funkcja ta zwraca wartość 0, zaś w momencie zakończenia ruchu – wartość 1.

We wzorach opisujących przyrost zmiennej konfiguracyjnej można się odwoływać do początkowych wartości zmiennych konfiguracyjnych dowolnych członów robota. Te wartości początkowe są zwracane przez funkcję TSTART (<Nazwa członu>)

Przykład: MOVE (CZLON2 , L() * (80 – T START (RAMIE1)))

Określenie zależności przyrostu zmiennej konfiguracyjnej danego członu od czasu nazywamy planowaniem trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych.

Opis instrukcji pozycjonowania w systemie modelowania




```
procedure mj
parameters alfa, H, L, beta
dalfa := – alfa – tstart (column)
dh := H – tstart (slider)
dl := L – tstart (arm)
dbeta := – beta – tstart (efector)
repeat
 move (column, dalfa*l() )
 move (slider, dh*l() )
 move (arm, dl*l() )
 move (efector, dbeta*l() )
until  done ()
endproc
```

Demonstracja

Programowanie robotów przemysłowych

- Podstawowy podział metod programowania robotów:
  - Programowanie „on-line”
  - Programowanie „off-line”
- Programowanie „przez nauczanie” jako najbardziej rozpowszechniona metoda programowania „on-line”:

„Zapamiętywanie” pozycji

Realizacja sekwencji przemieszczeń

- Programowanie ciągłe i dyskretne

Zalety i wady programowania przez nauczanie

Zalety:

- Brak konieczności przeprowadzania jakichkolwiek obliczeń
- Łatwość „uczenia”, które odbywa się w rzeczywistym środowisku robota
- Zredukowanie do minimum prawdopodobieństwa pomyłek

Wady:

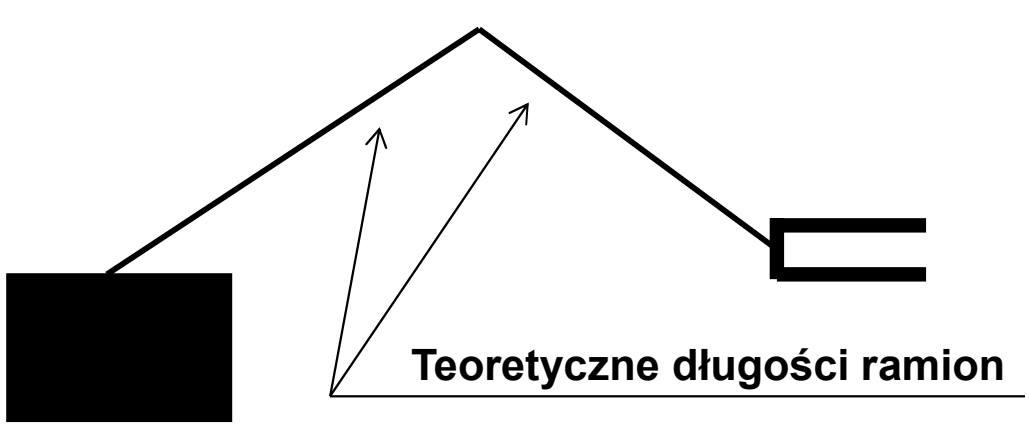
- Zaangażowanie robota w czasochłonny proces programowania
- Ograniczona dokładność definiowania pozycji (na ogół jednak wystarczająca w przypadku większości zadań realizowanych przez robota)

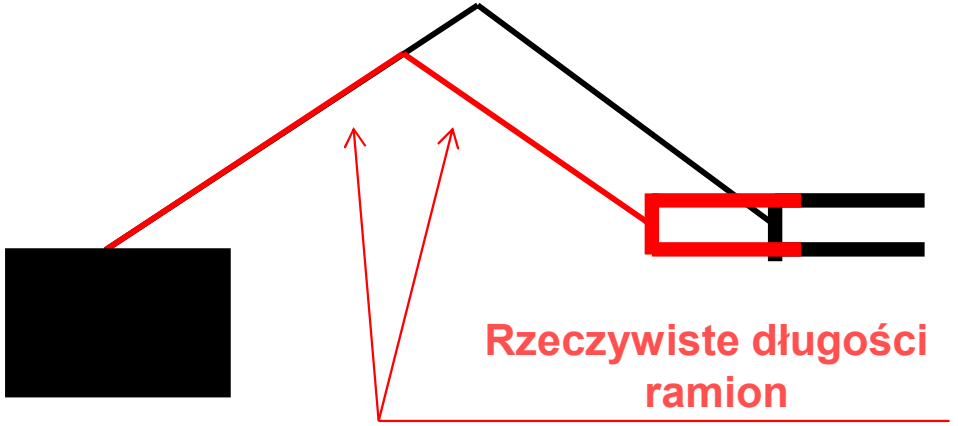
Programowanie „off-line”

- Tworzenie programu poza robotem (w czasie, gdy może on realizować poprzednio zaprogramowane zadanie)
- Złożony zapis położenia efektora w każdej pozycji (w ogólnym przypadku 6 współrzędnych)
- Duże prawdopodobieństwo popełniania błędów
- Zastosowanie symulacji graficznej do sprawdzania poprawności wygenerowanych programów
- Symulacja graficzna wymaga wcześniejszego pracochłonnego utworzenia (trójwymiarowego) modelu otoczenia robota
- Konieczność zapewnienia zgodności modelu otoczenia z otoczeniem rzeczywistym
- Zaawansowane systemy programowania „off-line” (oparte o VR): programowanie zbliżone do programowania „przez nauczanie”
- Mogą wystąpić niedokładności wynikające ze sposobu rozwiązywania odwrotnego zadania kinematyki

Programowanie „off-line” a odwrotne zadanie kinematyki

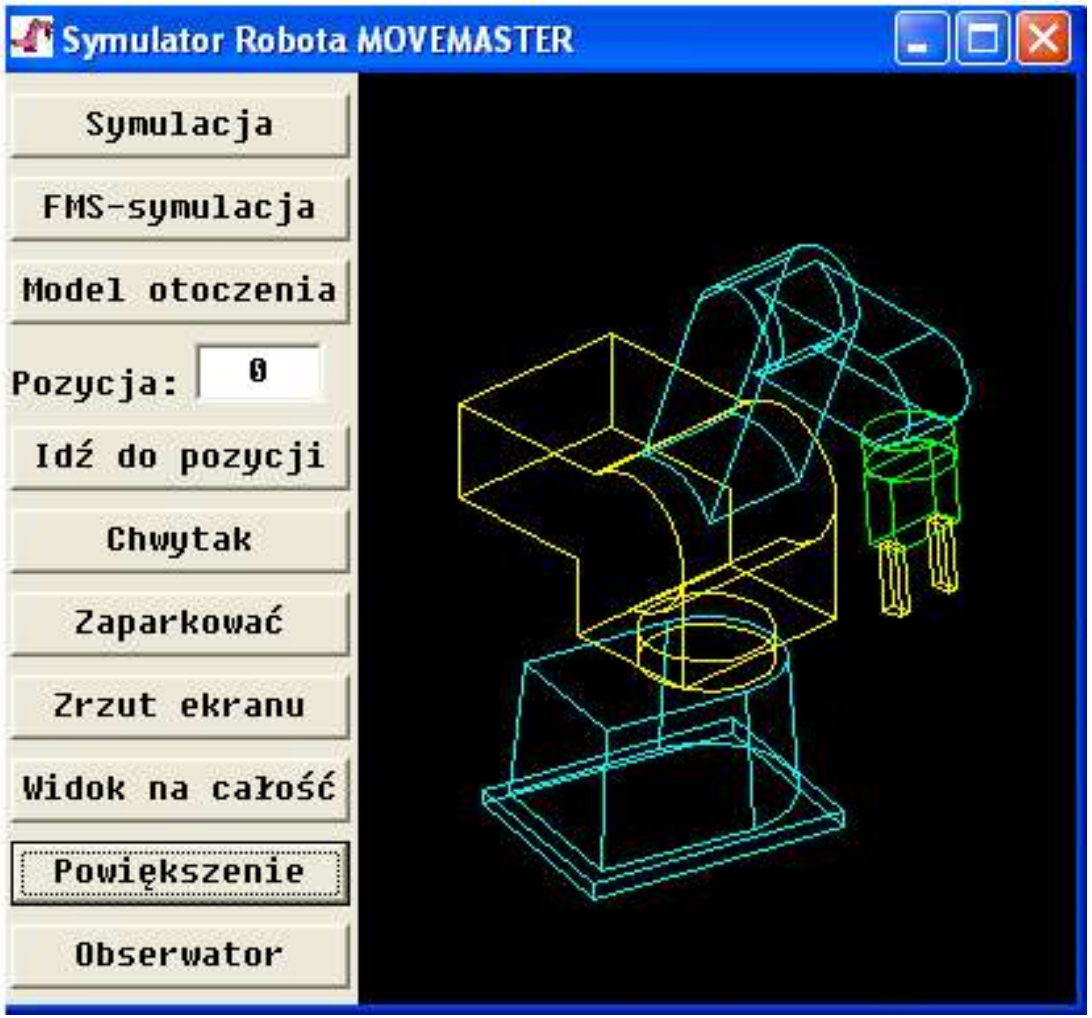
- Przy programowaniu „off-line” zawsze musi mieć miejsce rozwiązywanie odwrotnego zadania kinematyki (przez system programowania lub przez układ sterowania robota)
- Algorytm rozwiązywania odwrotnego zadania kinematyki odwołuje się do danych geometrycznych robota, a te mogą być różne dla każdego pojedynczego egzemplarza robota





- Niedokładności mogą być zredukowane za pomocą tzw. kalibracji robota
- Algorytm zastosowany przy symulacji może być niezgodny z algorytmem realizowanym przez układ sterowania robota

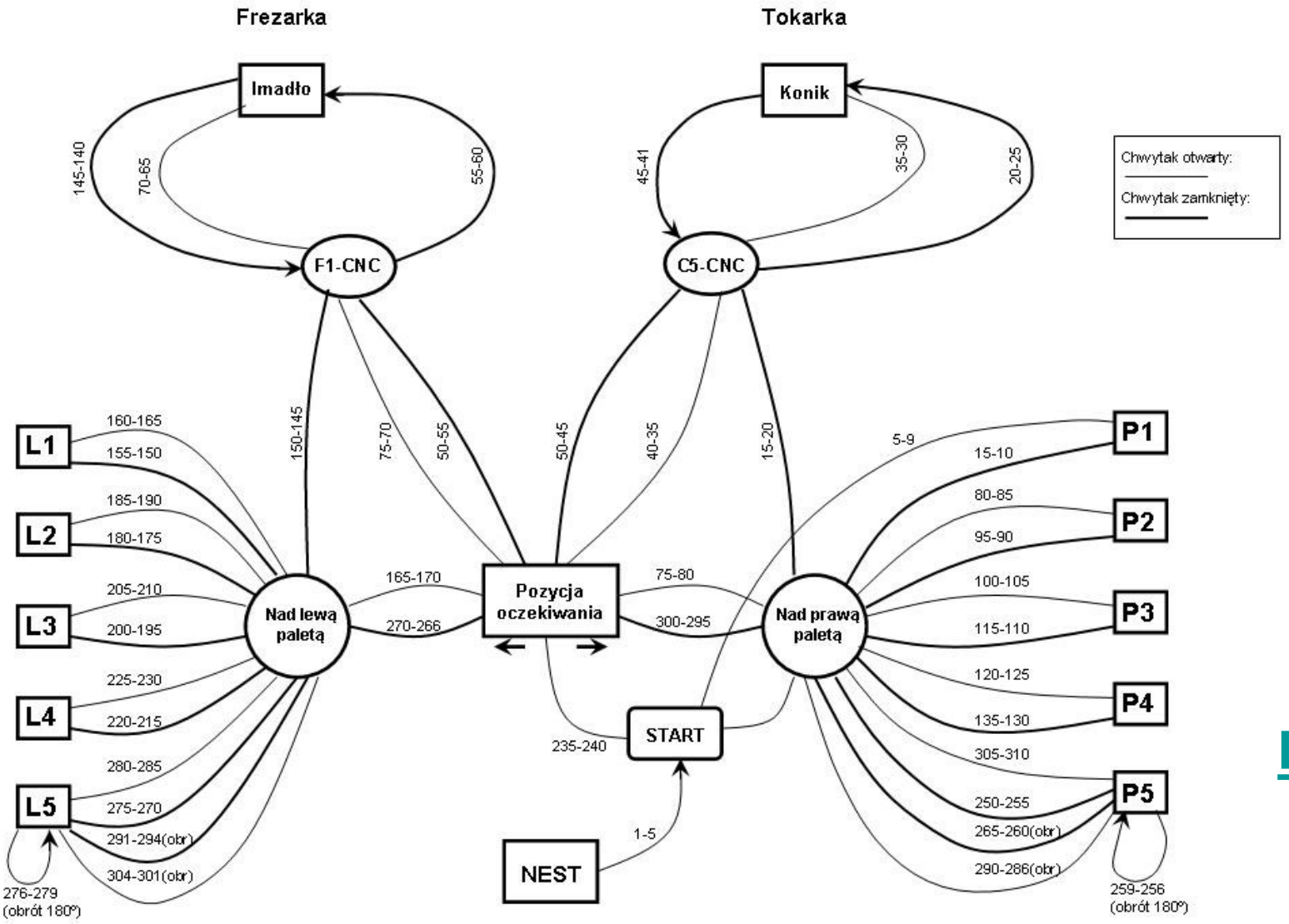
Proste i odwrotne zadanie kinematyki dla robota Movemaster-EX



Język programowania robota na przykładzie robota Movemaster-EX

MO <nr pozycji>	- ruch do pozycji o podanym numerze, wprowadzonej metodą „uczenia”. Przykład: MO 15
MC <nr1>,<nr2>	- ciągły ruch po trajektorii określonej przez pozycje o numerach od nr1 do nr2. Przykłady: MC 10,15 MC 15,10
MP x, y, z, a, b	- ruch chwytaka robota do pozycji określonej przez wartości współrzędnych x, y, z, a, b
GO	- otwarcie chwytaka
GC	- zamkniecie chwytaka
NT	- zaparkowanie robota
SP <nr>	- ustawienie prędkości ruchu ramion robota
ED	- koniec programu

Programowanie robota Movemaster-EX z wykorzystaniem pozycji wprowadzonych metodą „uczenia”



Demonstracja

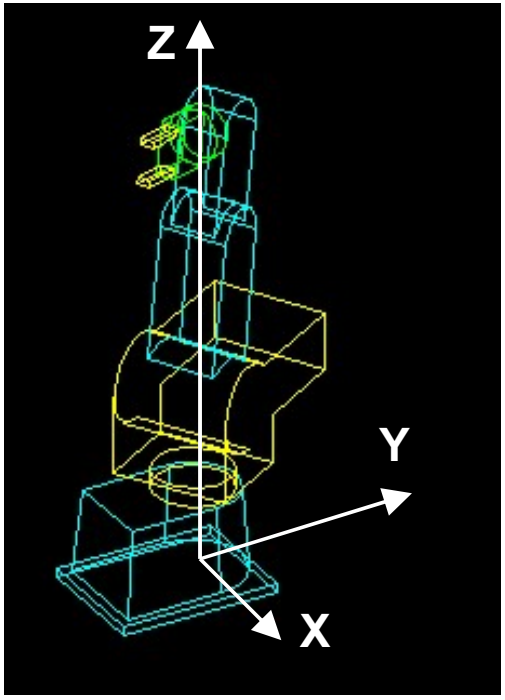
Współrzędnościowe pogramowanie robota Movemaster-EX

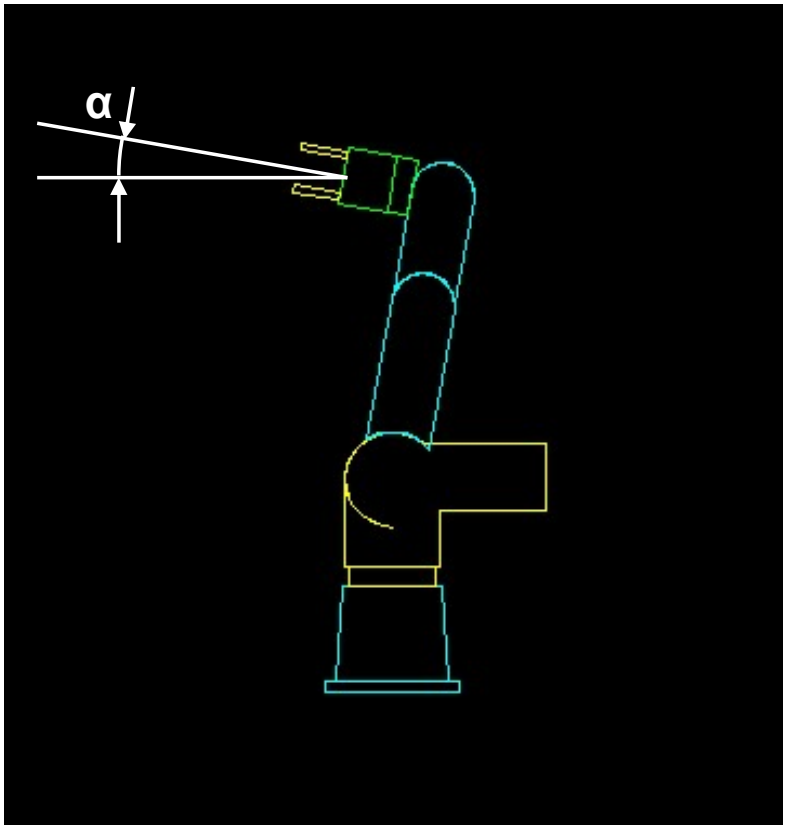
Opis pozycji dla robota Movemaster-EX (5 stopni swobody):

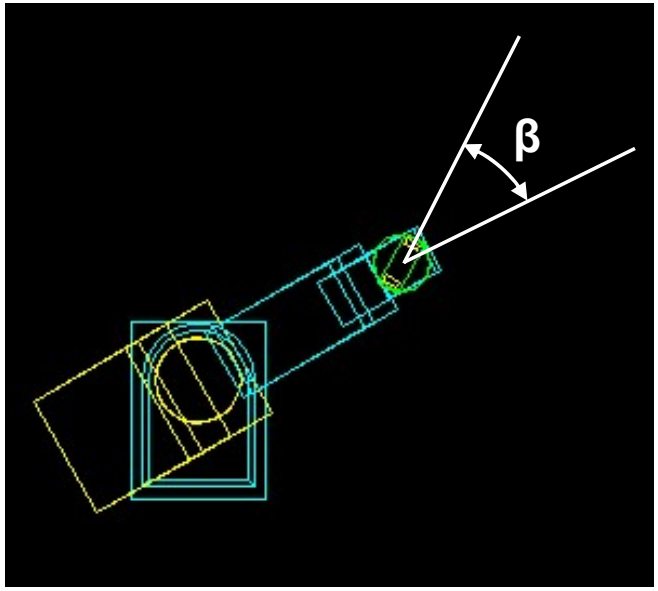
MP x, y, z, α, β

x,y,z – współrzędne kartezjańskie punktu TCP

α, β – położenie kątowe chwytaka

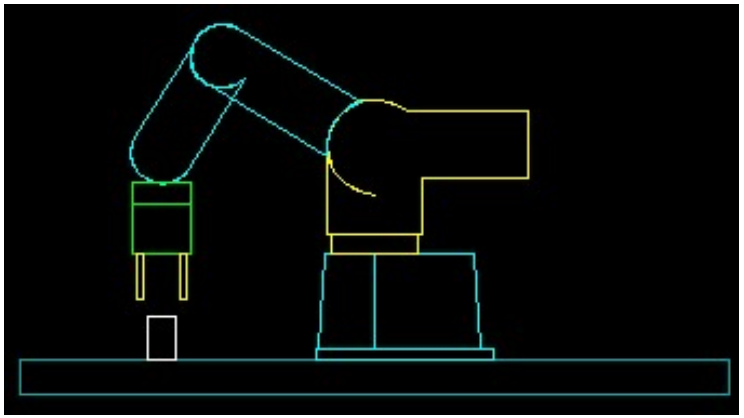






Wybrane zasady programowania robotów realizujących zadania manipulacyjne

Typowa sekwencja przemieszczeń dla zadania „pick-and-place”:



Ustawienie nad przedmiotem z docelową orientacją kątową

MP 0,300,100,-90,0

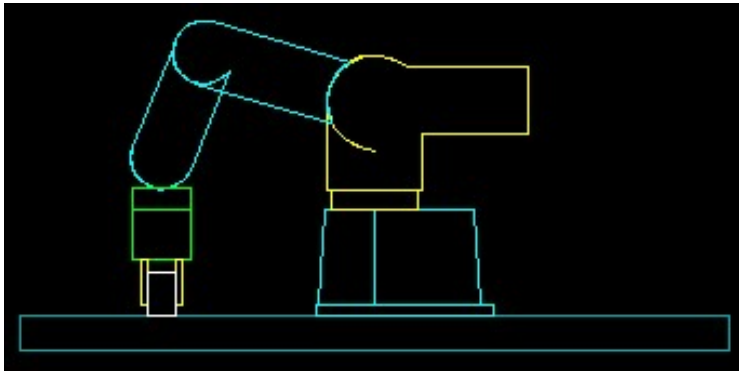
MP 0,300,30,-90,0 →

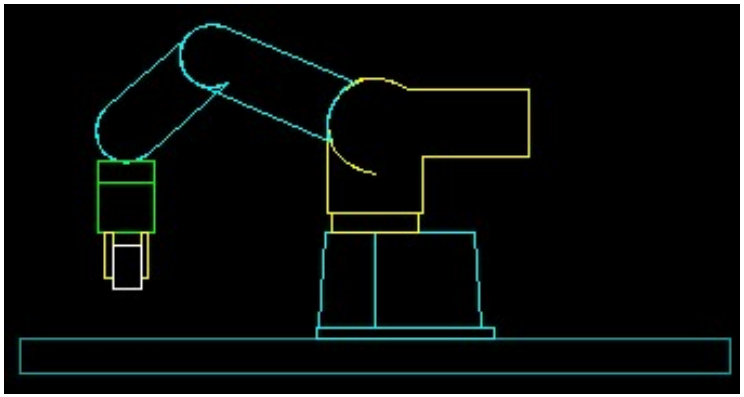
GC

MP 0,300,100,-90,0

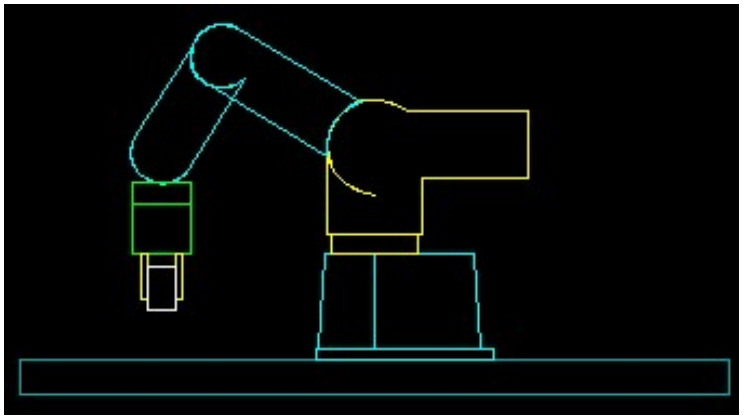
MP 0,350,100,-90,0 →

MP 0,350,30,-90,0

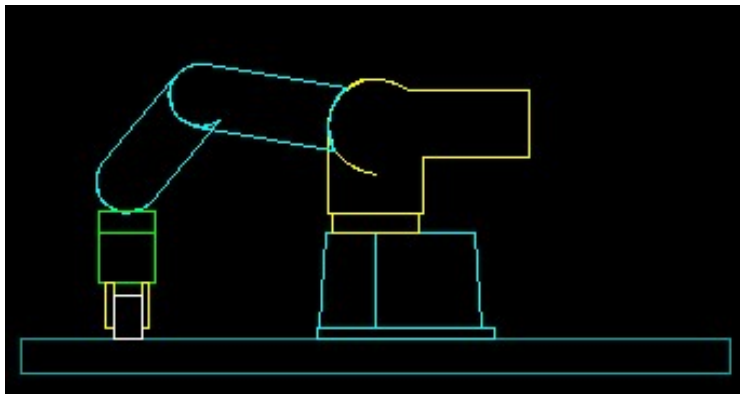




Przemieszczenie nad docelową pozycję z docelową orientacją



Podniesienie przedmiotu pionowo w górę



Pionowe opuszczenie obiektu, zapobiegające ew. kolizji z podłożem, która mogłaby mieć miejsce przy braku interpolacji

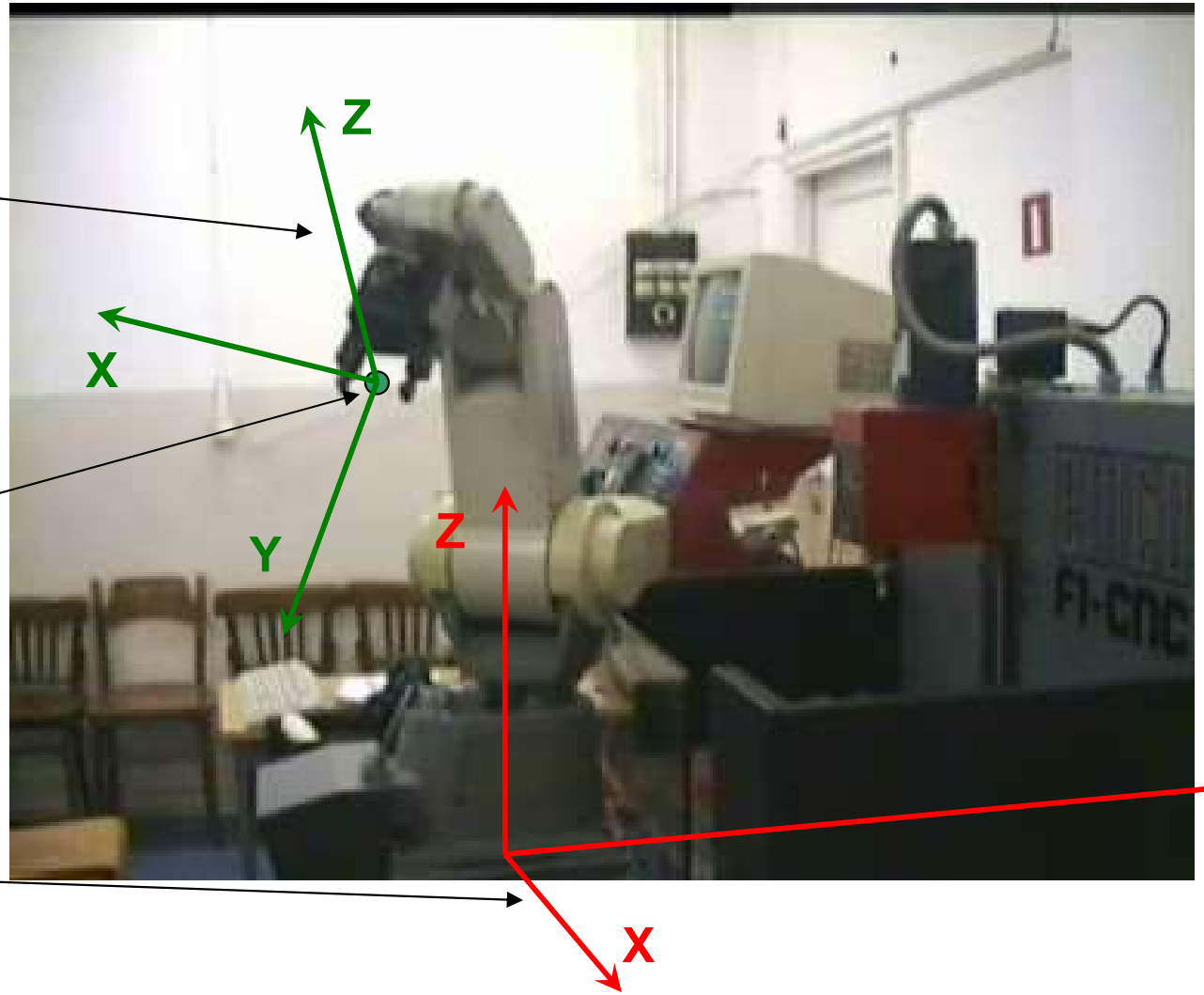
Programowanie współrzędnościowe robotów o dowolnej liczbie stopni swobody

Wykorzystujemy fakt, że położenie chwytaka w przestrzeni można określić przez wzajemne położenie dwóch układów współrzędnych

Układ współrzędnych chwytaka (lokalny)

Punkt charakterystyczny (TCP – tool center point)

Układ współrzędnych robota (układ odniesienia)



Układy współrzędnych stanowiska zrobotyzowanego

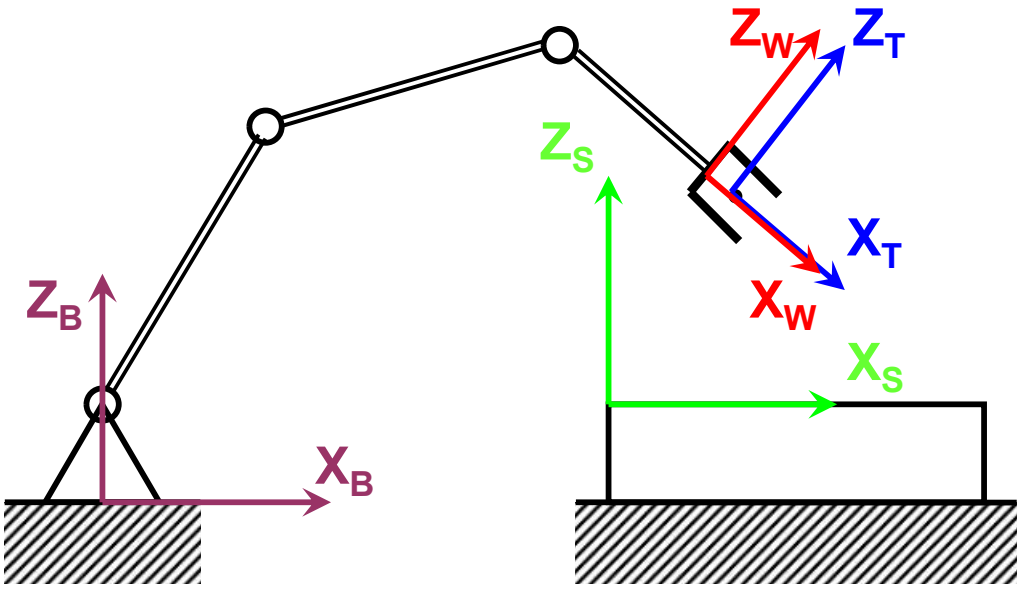
Układy odniesienia:

podstawy → B

stanowiska → S

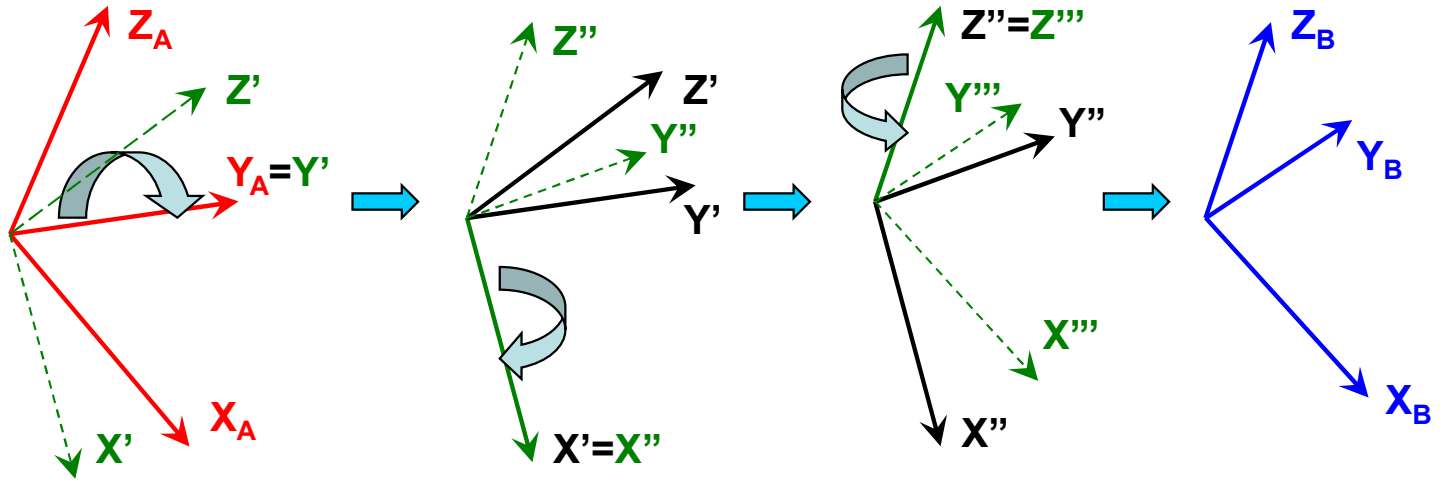
kiści → W

narzędzia → T (TCP)



Opis orientacji za pomocą kątów Eulera

Można udowodnić, że dowolnie zorientowany układ współrzędnych A można zorientować zgodnie z innym, dowolnie zorientowanym układem współrzędnych B, poprzez złożenie kolejno po sobie następujących co najwyżej trzech obrotów o odpowiednio dobrane kąty wokół własnych osi tego układu



Opis orientacji za pomocą kątów Eulera – c.d.

Kąty kolejnych takich obrotów mogą służyć do jednoznacznego określenia orientacji układu współrzędnych B w stosunku do układu współrzędnych odniesienia A

- **Kąty te nazywamy kątami Eulera**

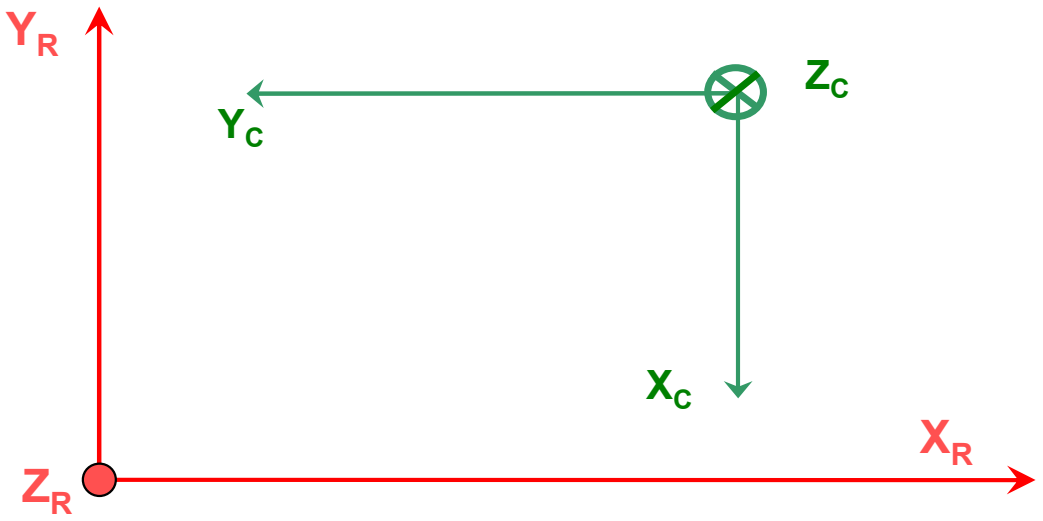
- **Kolejność obrotów wokół poszczególnych osi (X, Y i Z) ma znaczenie dla końcowej orientacji kątowej obracanego układu, w związku z czym przy podawaniu kątów Eulera należy określić kolejność tych obrotów np.:**

$\alpha_X=\pi \quad \beta_Y=\pi/2 \quad \gamma_Z=\pi/4$ **- obroty kolejno wokół osi X o kąt π, następnie wokół osi Y o kąt π/2, a na końcu wokół osi Z o kąt π/4**

$\alpha_Y=\pi/2 \quad \beta_Z=\pi/4 \quad \gamma_X=\pi$ **- obroty kolejno wokół osi Y o kąt π/2, następnie wokół osi Z o kąt π/4, a na końcu wokół osi X o kąt π**

Opis orientacji kątowej chwytaka za pomocą kątów Eulera– c.d.

Przykład opisu orientacji układu współrzędnych chwytaka robota $X_C Y_C Z_C$ w globalnym układzie współrzędnych robota $X_R Y_R Z_R$:



$\alpha_X=\pi \quad \beta_Y=0 \quad \gamma_Z=\pi/2$

Przykład zastosowania kątów Eulera w instrukcjach pozycjonowania robota przemysłowego

POS V=100% X=500 Y=235 Z=160 XX=180 YY=0 ZZ=90

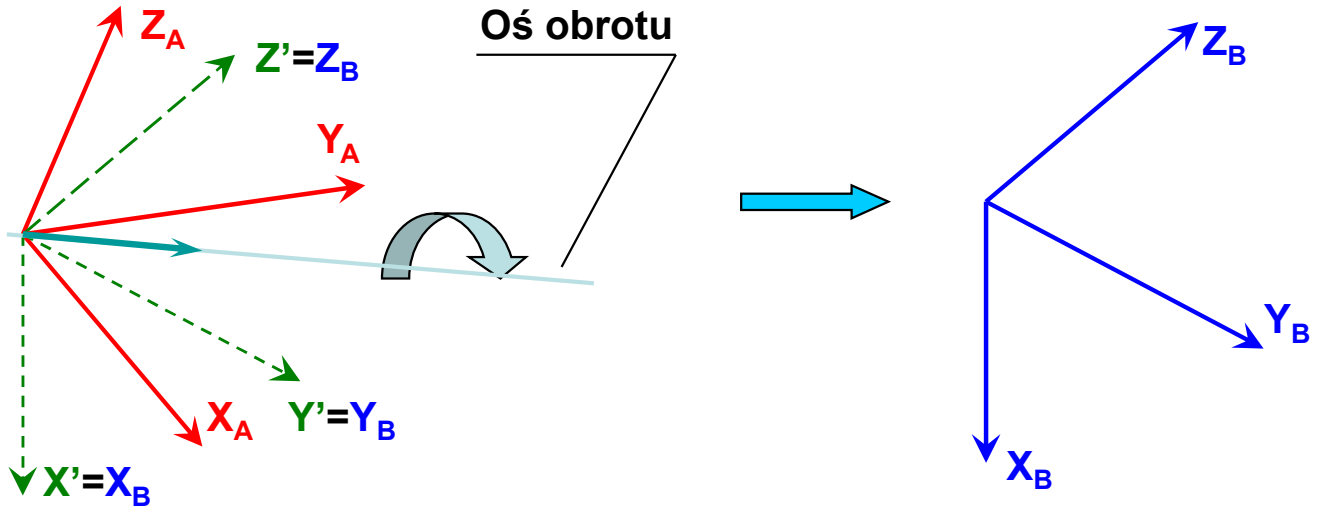
POS V=50% X=550 Y=235 Z=140 ZZ=90 YY=180 XX=0

.....

(w obu powyższych instrukcjach pozycjonowania orientacja kątowa chwytaka jest taka sama)

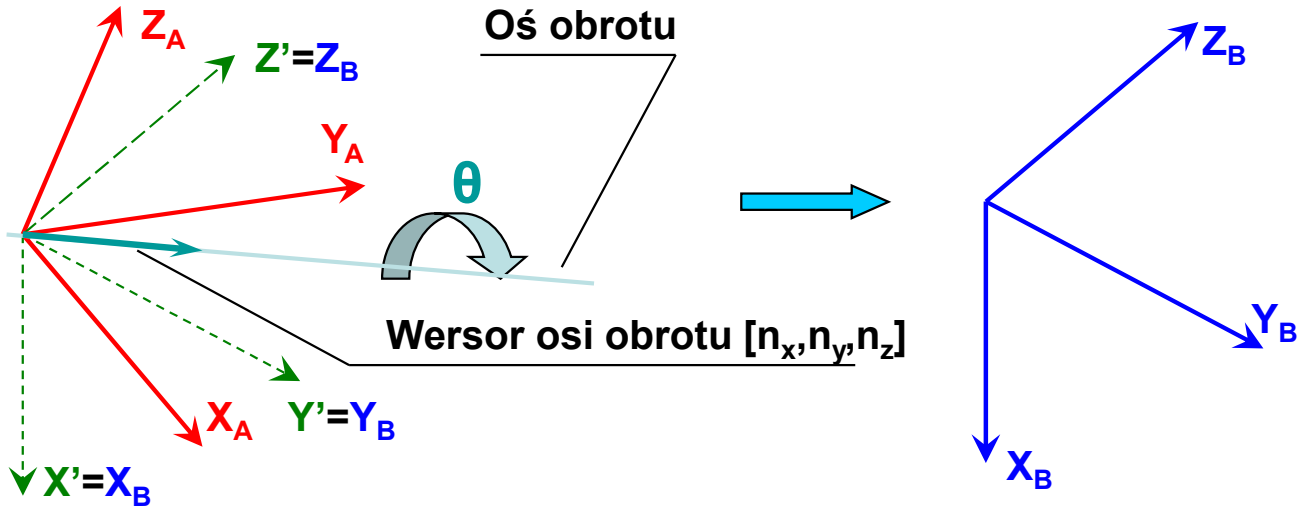
Opis orientacji za pomocą kwaternionów

Można udowodnić, że dowolnie zorientowany układ współrzędnych A można zorientować zgodnie z innym, dowolnie zorientowanym układem współrzędnych B, poprzez realizację pojedynczego obrotu o określony kąt wokół odpowiednio dobranej osi (najczęściej nie pokrywającej się z żadną osią tego układu współrzędnych)



Opis orientacji za pomocą kwaternionów – c.d.

Orientacja osi obrotu (określona przez współrzędne jej wersora n_x,n_y,n_z) oraz wartość kąta obrotu θ mogą służyć do jednoznacznego określenia orientacji układu współrzędnych B w stosunku do układu współrzędnych odniesienia A

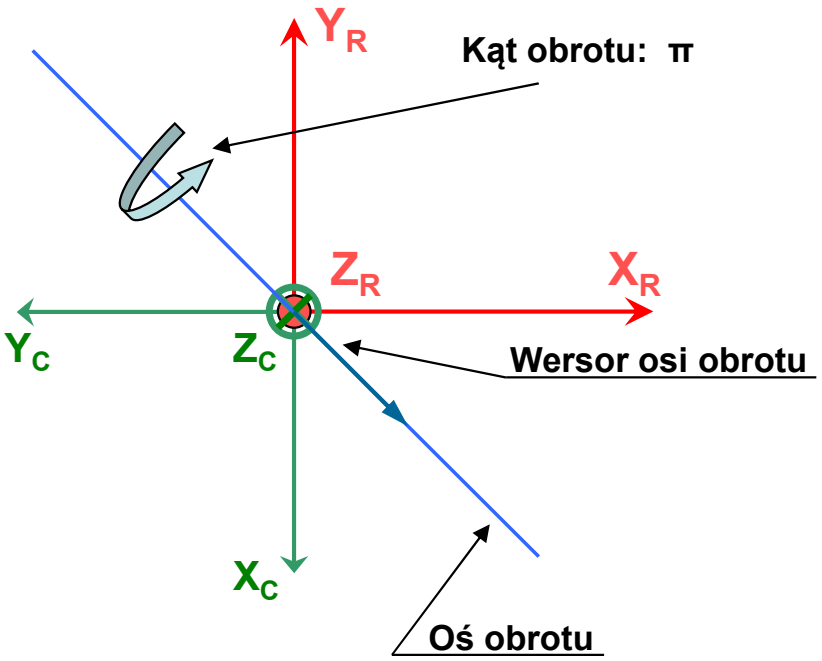


Równoznaczne z powyższym jest określenie orientacji układu współrzędnych B w stosunku do układu współrzędnych A za pomocą tzw. kwaternionów, określonych następującymi wzorami:

$$Q_1 = \cos(\theta/2) \qquad Q_2 = n_x \sin(\theta/2) \qquad Q_3 = n_y \sin(\theta/2) \qquad Q_4 = n_z \sin(\theta/2)$$

Opis orientacji kątowej chwytaka za pomocą kwaternionów – c.d.

Przykład opisu orientacji układu współrzędnych chwytaka robota $X_C Y_C Z_C$ w globalnym układzie współrzędnych robota $X_R Y_R Z_R$:



$n_X = \sqrt{2}/2 \quad n_Y = -\sqrt{2}/2$

$n_Z = 0$

$\Theta = \pi$

stąd:

Q1 = 0

Q2 = $\sqrt{2}/2$

Q3 = $-\sqrt{2}/2$

Q4 = 0

Przykład zastosowania kwaternionów w instrukcjach pozycjonowania robota przemysłowego

POS V=100% X=500 Y=235 Z=160 Q1=0 Q2=0.707 Q3=-0.707 Q4=0

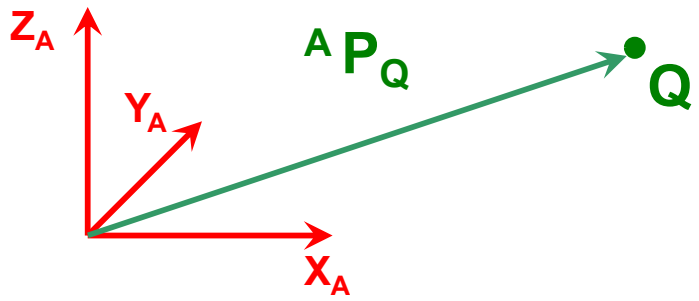
POS V=50% X=550 Y=235 Z=140 Q1=0 Q2=-0.707 Q3=0.707 Q4=0

…….

(w obu powyższych instrukcjach pozycjonowania orientacja chwytaka jest taka sama)

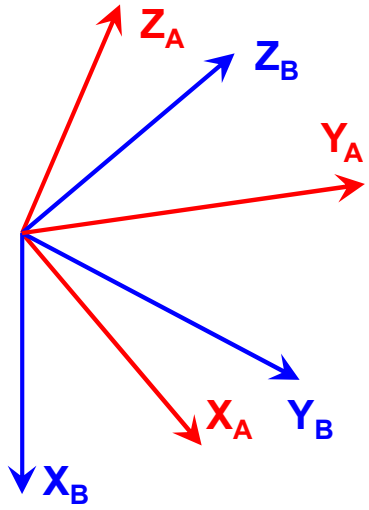
Opis położenia za pomocą wektora pozycji i macierzy orientacji

Położenie liniowe punktu Q w układzie współrzędnych A:



$$ {}^A P_Q = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} $$

Położenie kątowe układu B w układzie A jest określone przez macierz obrotu:



$$ {}^A_B R = \left[{}^A\hat{X}_B \; {}^A\hat{Y}_B \; {}^A\hat{Z}_B \right] = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} $$

Opis położenia kątowego za pomocą macierzy orientacji - c.d.

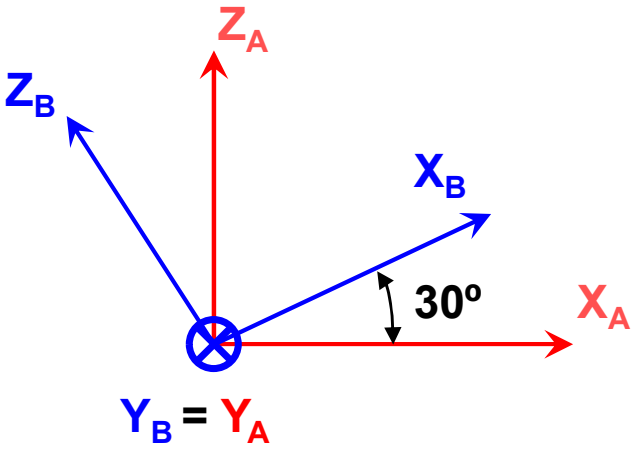
Wiersze macierzy ${}^{A}_{B}R$ są z kolei wersorami osi układu współrzędnych A w układzie B:

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_{A}^{T} \end{bmatrix} $$

Zatem ${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T}$:

$$ {}^{A}_{B}R^{T} = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A} & {}^{B}\hat{Y}_{A} & {}^{B}\hat{Z}_{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{A}\cdot\hat{X}_{B} & \hat{Y}_{A}\cdot\hat{X}_{B} & \hat{Z}_{A}\cdot\hat{X}_{B} \\ \hat{X}_{A}\cdot\hat{Y}_{B} & \hat{Y}_{A}\cdot\hat{Y}_{B} & \hat{Z}_{A}\cdot\hat{Y}_{B} \\ \hat{X}_{A}\cdot\hat{Z}_{B} & \hat{Y}_{A}\cdot\hat{Z}_{B} & \hat{Z}_{A}\cdot\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} $$

Opis położenia kątowego za pomocą macierzy orientacji - przykład



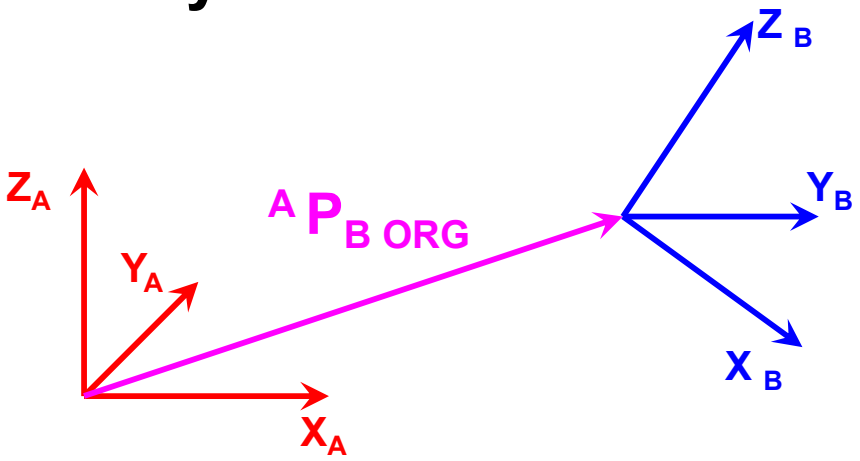
$$ {}^A\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad {}^A\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^A\hat{Z}_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} $$

Zatem:

$$ {}^A_B R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} $$

Specjalna grupa euklidesowa

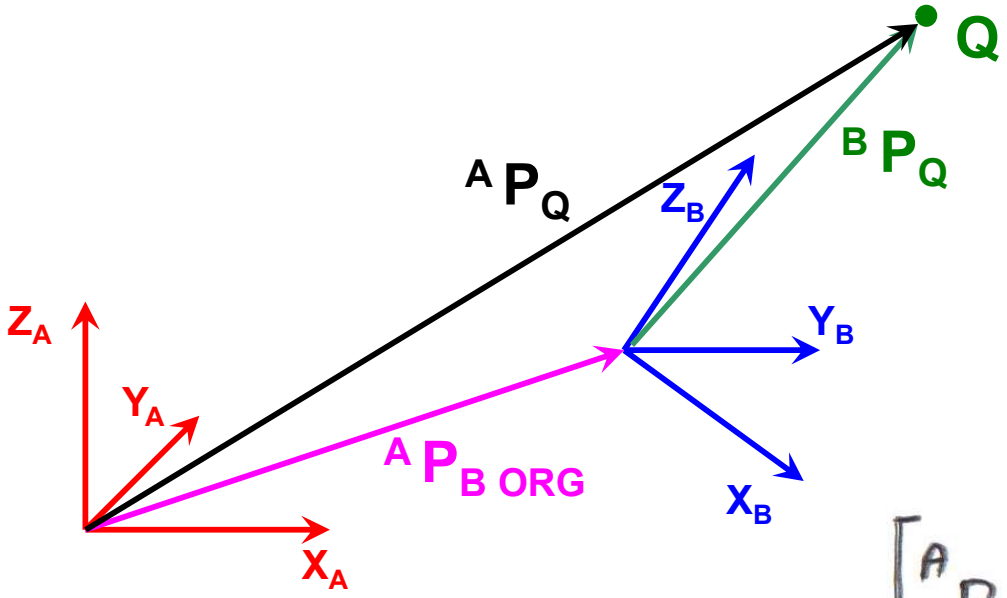
Specjalna grupa euklidesowa SE(3) umożliwia przedstawienie pozycji liniowej i orientacji kątowej (np. chwytaka robota) za pomocą jednej macierzy



$$SE(3) = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B & {}^{A}P_{BORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} {}^{A}_{B}R & & & {}^{A}P_{BORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

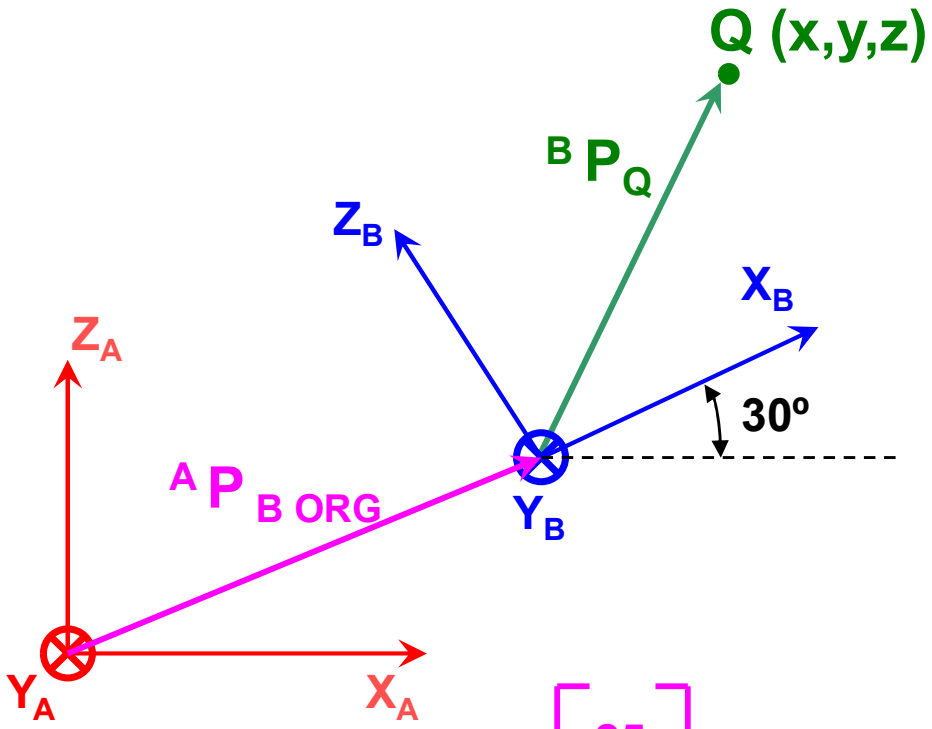
Odwzorowania układów współrzędnych za pomocą specjalnej grupy euklidesowej

Przekształcenie opisu położenia punktu przy przejściu z jednego układu współrzędnych do drugiego:



$$\begin{bmatrix} {}^{A}P_{Q} \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} {}^{A}_{B}R & & & {}^{A}P_{B\,ORG} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} {}^{B}P_{Q} \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

Odwzorowania układów współrzędnych za pomocą specjalnej grupy euklidesowej - przykład

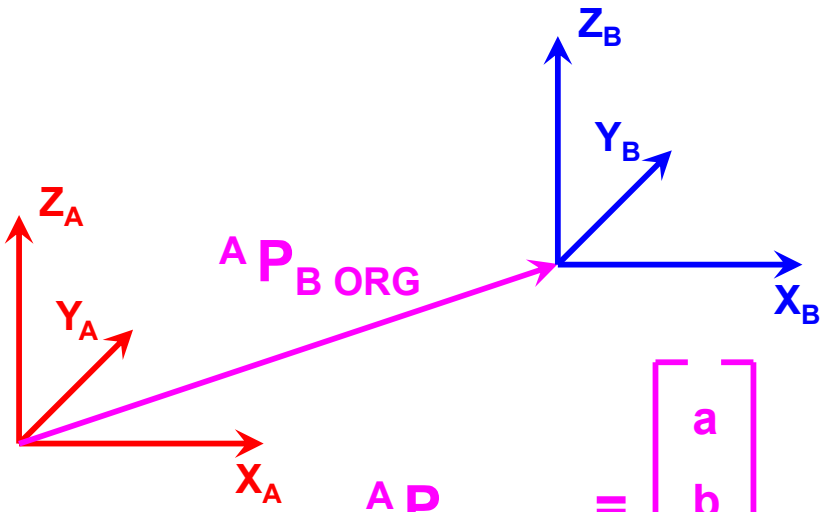


$$^{A}P_{B\,ORG} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^{A}x_Q \\ {}^{A}y_Q \\ {}^{A}z_Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{B}x_Q \\ {}^{B}y_Q \\ {}^{B}z_Q \\ 1 \end{bmatrix}$$

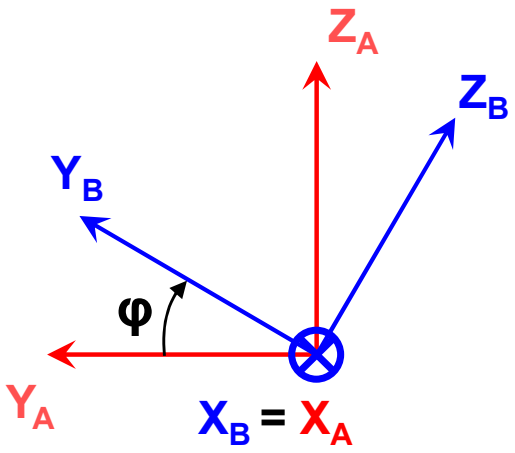
$$\begin{cases} {}^{A}x_Q = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot {}^{B}x_Q - \frac{1}{2} \cdot {}^{B}z_Q + 25 \\ {}^{A}y_Q = {}^{B}y_Q \\ {}^{A}z_Q = \frac{1}{2} \cdot {}^{B}x_Q + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot {}^{B}z_Q + 10 \end{cases}$$

Macierze opisujące elementarne transformacje



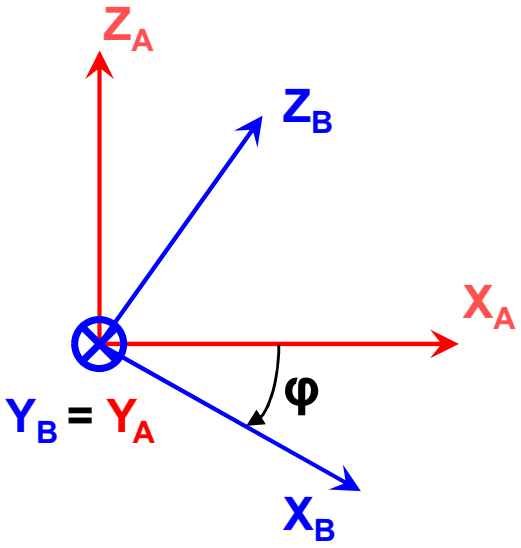
$$^A P_{B\,ORG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\text{Tran}(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

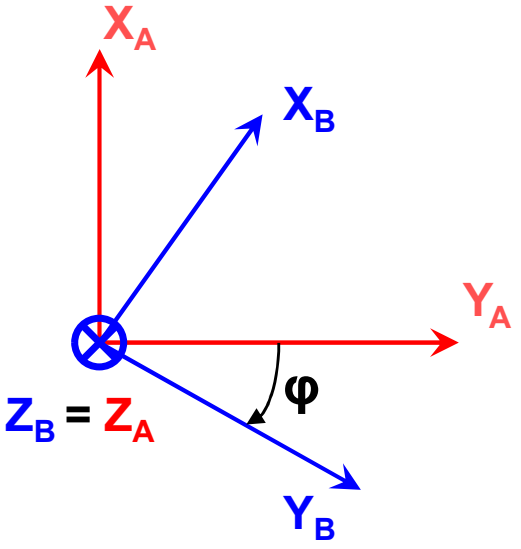


$$\text{RotX}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze opisujące elementarne transformacje – c.d.

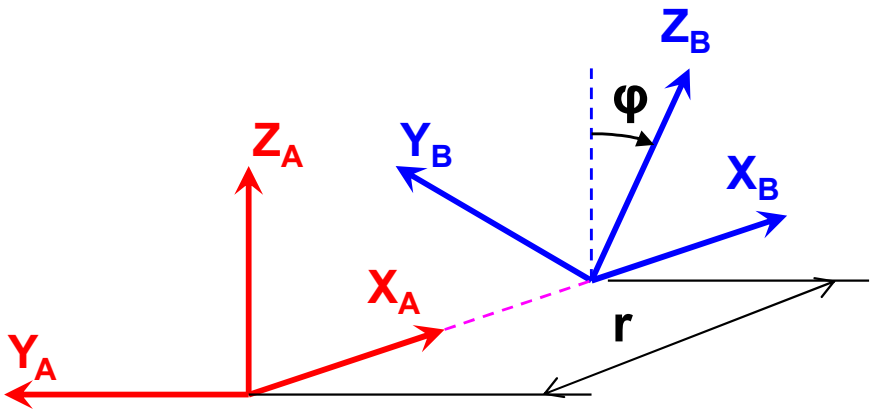


$$\mathrm{RotY}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

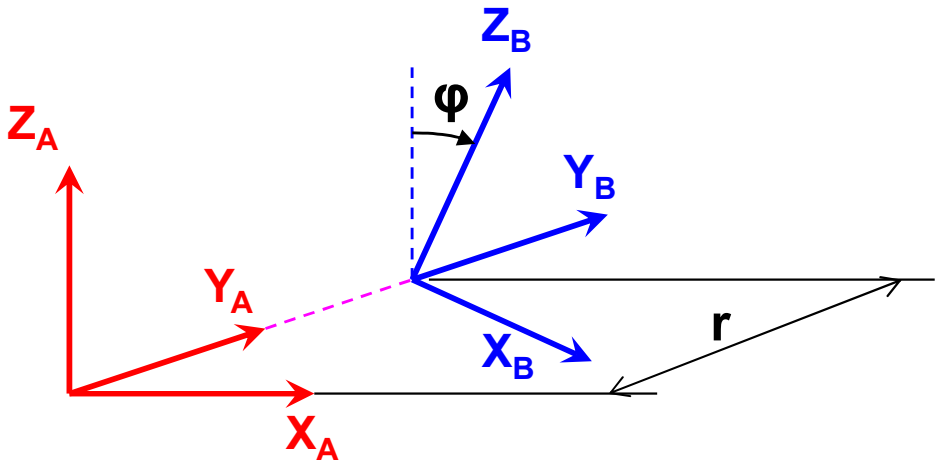


$$\mathrm{RotZ}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze opisujące elementarne transformacje – c.d.

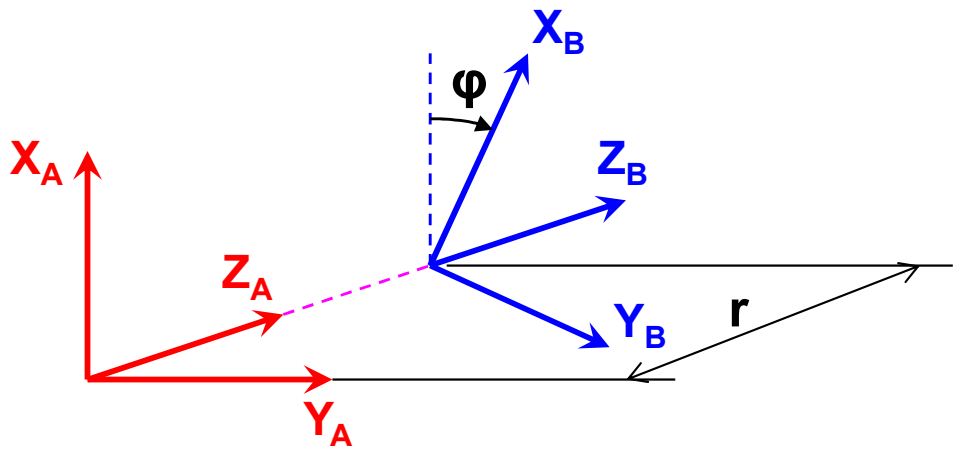


$$\text{SkrętX}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\text{SkrętY}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze opisujące elementarne transformacje – c.d.



$$\text{SkrętZ}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Określenie położenia TCP w układzie współrzędnych podstawy robota

Transformacja pomiędzy układami współrzędnych przegubu „i-1” i „i”:

$$
{}^{i-1}_{i}T = RotX(\alpha_{i-1}) \cdot TranX(a_{i-1}) \cdot TranZ(d_i) \cdot RotZ(\theta_i) =
$$

$$
= Skręt X(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot Skręt Z(d_i, \theta_i) =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \cos\alpha_{i-1}\cdot\sin\theta_i & \cos\alpha_{i-1}\cdot\cos\theta_i & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i\cdot\sin\alpha_{i-1} \\ \sin\alpha_{i-1}\cdot\sin\theta_i & \sin\alpha_{i-1}\cdot\cos\theta_i & \cos\alpha_{i-1} & d_i\cdot\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Określenie położenia TCP w układzie współrzędnych podstawy robota – c.d.

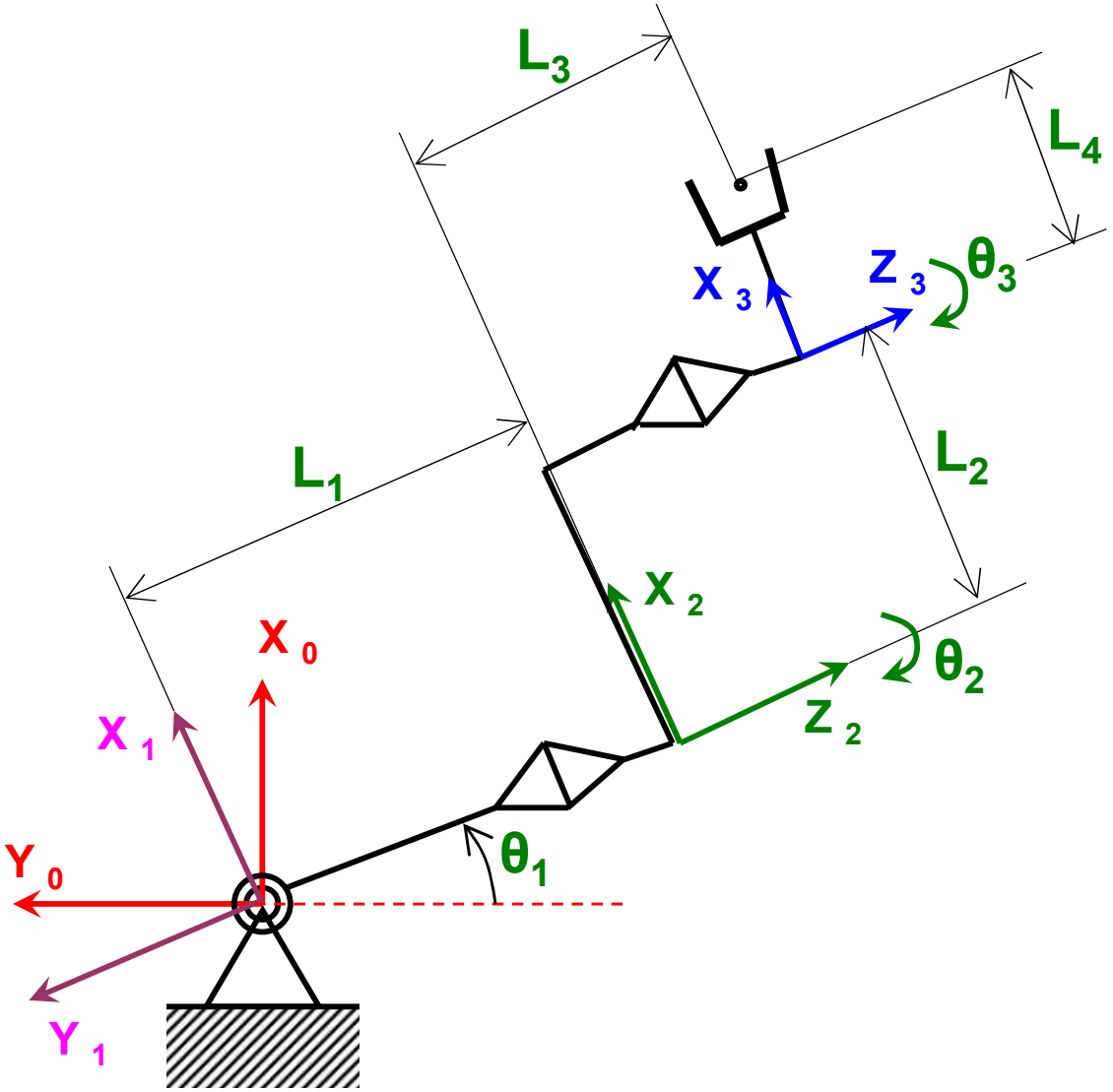
Transformacja pomiędzy układami współrzędnych podstawy i ostatniego członu robota:

$$ {}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}_{n}T $$

Obliczenie położenia punktu TCP w układzie współrzędnych podstawy robota przy jego znanym położeniu w układzie współrzędnych ostatniego członu (kiści):

$$ \begin{bmatrix} {}^{0}P_{TCP} \\ \hline 1 \end{bmatrix} = {}^{0}_{n}T \cdot \begin{bmatrix} {}^{n}P_{TCP} \\ \hline 1 \end{bmatrix} $$

Określenie transformacji dla przykładowego robota



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0º	0	0	θ_1
2	90º	0	L_1	θ_2
3	0º	L_2	L_3	θ_3

$$ {}^{3}P_{TCP} = \begin{bmatrix} L_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Określenie transformacji dla przykładowego robota – c.d.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0º	0	0	θ_1
2	90º	0	L_1	θ_2
3	0º	L_2	L_3	θ_3

$$\alpha_0 = 0^\circ \Rightarrow \sin\alpha_0 = 0 \quad \cos\alpha_0 = 1$$
$$a_0 = 0 \qquad d_1 = 0$$

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & a_0 \\ \cos\alpha_0 \cdot \sin\theta_1 & \cos\alpha_0 \cdot \cos\theta_1 & -\sin\alpha_0 & -d_1 \cdot \sin\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 \cdot \sin\theta_1 & \sin\alpha_0 \cdot \cos\theta_1 & \cos\alpha_0 & d_1 \cdot \cos\alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Określenie transformacji dla przykładowego robota – c.d.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0º	0	0	θ_1
2	90º	0	L_1	θ_2
3	0º	L_2	L_3	θ_3

$$\alpha_1 = 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha_1 = 1 \quad \cos\alpha_1 = 0$$
$$a_1 = 0 \qquad d_2 = L_1$$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_1 \\ \cos\alpha_1 \cdot \sin\theta_2 & \cos\alpha_1 \cdot \cos\theta_2 & -\sin\alpha_1 & -d_2 \cdot \sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \cdot \sin\theta_2 & \sin\alpha_1 \cdot \cos\theta_2 & \cos\alpha_1 & d_2 \cdot \cos\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = $$

$$ = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Określenie transformacji dla przykładowego robota – c.d.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0º	0	0	θ_1
2	90º	0	L_1	θ_2
3	0º	L_2	L_3	θ_3

$\alpha_2 = 0^\circ \Rightarrow \sin\alpha_2 = 0 \quad \cos\alpha_2 = 1$

$a_2 = L_2 \qquad d_3 = L_3$

$$
{}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & a_2 \\ \cos\alpha_2 \cdot \sin\theta_3 & \cos\alpha_2 \cdot \cos\theta_3 & -\sin\alpha_2 & -d_3 \cdot \sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 \cdot \sin\theta_3 & \sin\alpha_2 \cdot \cos\theta_3 & \cos\alpha_2 & d_3 \cdot \cos\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & L_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Określenie transformacji dla przykładowego robota – c.d.

$$ {}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T $$

$$ {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = $$

$$ = \begin{bmatrix} c\theta_1 \cdot c\theta_2 & -c\theta_1 \cdot s\theta_2 & s\theta_1 & L_1 \cdot s\theta_1 \\ s\theta_1 \cdot c\theta_2 & -s\theta_1 \cdot s\theta_2 & -c\theta_1 & -L_1 \cdot c\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Określenie transformacji dla przykładowego robota – c.d.

$$ {}^{0}_{3}T = \left({}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T\right) \cdot {}^{2}_{3}T = $$

$$ = \begin{bmatrix} c\theta_1 \cdot c\theta_2 & -c\theta_1 \cdot s\theta_2 & s\theta_1 & L_1 \cdot s\theta_1 \\ s\theta_1 \cdot c\theta_2 & -s\theta_1 \cdot s\theta_2 & -c\theta_1 & -L_1 \cdot c\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = $$

$$ = \begin{bmatrix} c\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot c\theta_3 - c\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3 & -c\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot s\theta_3 - c\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot c\theta_3 & s\theta_1 & L_2 \cdot c\theta_1 \cdot c\theta_2 + L_3 \cdot s\theta_1 + L_1 \cdot s\theta_1 \\ s\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot c\theta_3 - s\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3 & -s\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot s\theta_3 - s\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot c\theta_3 & -c\theta_1 & L_2 \cdot s\theta_1 \cdot c\theta_2 - L_3 \cdot c\theta_1 - L_1 \cdot c\theta_1 \\ s\theta_2 \cdot c\theta_3 + c\theta_2 \cdot s\theta_3 & -s\theta_2 \cdot s\theta_3 + c\theta_2 \cdot c\theta_3 & 0 & L_2 \cdot s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Określenie transformacji dla przykładowego robota – c.d.

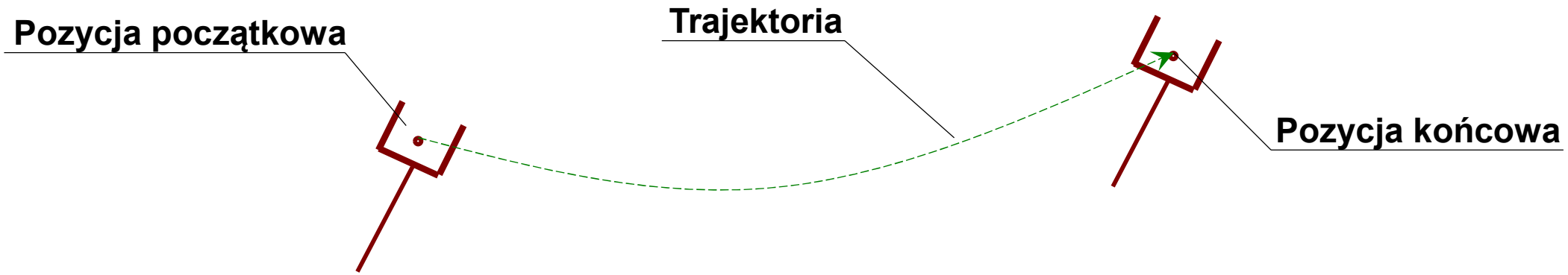
Przykładowo dla $\theta_1=45^o$ $\theta_2=0^o$ $\theta_3=0^o$:

$$ {}^0_3T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(L_1+L_2+L_3) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-L_1+L_2-L_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \begin{bmatrix} {}^0P_{TCP} \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(L_1+L_2+L_3) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-L_1+L_2-L_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(L_1+L_2+L_3+L_4) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-L_1+L_2-L_3+L_4) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Generowanie trajektorii

Niezależnie od sposobu programowania robota (teach-in, off-line) układ sterowania zazwyczaj musi wygenerować trajektorię zadaną przez użytkownika.



Generowanie punktów trajektorii zazwyczaj jest realizowane z częstotliwością 20–200 Hz (im większa częstotliwość, tym dokładniejsza ścieżka, ale również tym większa obliczeniochłonność).

Przy generowaniu trajektorii mogą być uwzględniane różne sytuacje i aspekty:

- **Użytkownik może zadawać tylko położenie końcowe (pozycję i orientację)**
- **Zadawane jest położenie końcowe i jedno lub kilka pośrednich**
- **Może być określony czas trwania ruchu (pośrednie zadawanie prędkości)**
- **Często występuje wymóg płynności ruchu (braku dużych przyspieszeń)**
- **Może być zadana ściśle określona ścieżka (interpolacja liniowa, kołowa itp.)**

Interpolacja

Realizacja interpolacji przez układ sterowania robota:

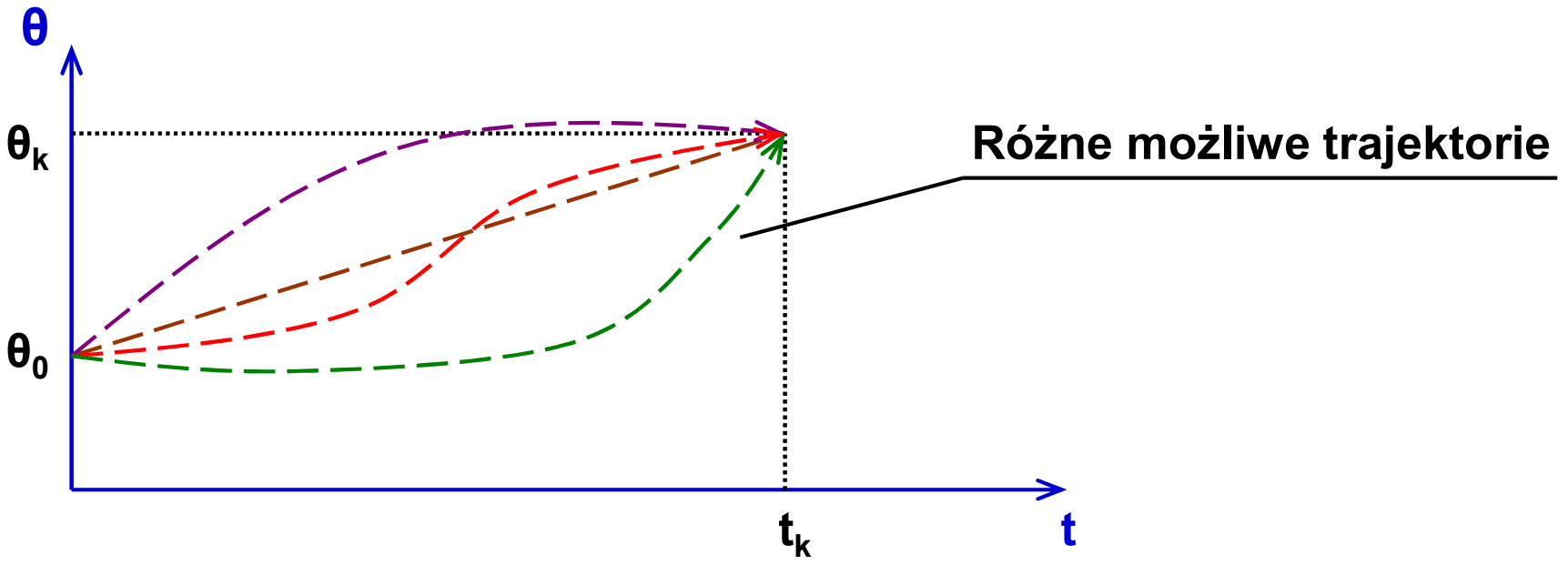
- **jest niezbędna tylko w niektórych zastosowaniach robotów**
- **jest z reguły znacznie bardziej skomplikowana obliczeniowo niż w przypadku obrabiarek CNC np. implikuje zmienną w czasie prędkość obrotową przegubu, zsynchronizowaną z prędkością innych przegubów**

Planowanie trajektorii w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych

Typowy algorytm działania:

- **Użytkownik zadaje położenie (pozycję i orientację) dla położeń pośrednich i położenia końcowego**
- **Dla położeń tych rozwiązywane jest odwrotne zadanie kinematyki (czyli określa się wartości zmiennych konfiguracyjnych dla poszczególnych połączeń ruchowych)**
- **Dla każdego z połączeń ruchowych wyznacza się gładką funkcję przemieszczeń przechodzącą przez te położenia**
- **Zazwyczaj zakłada się, że czas przemieszczania pomiędzy poszczególnymi położeniami jest taki sam dla wszystkich połączeń ruchowych (wszystkie przeguby rozpoczynają i kończą pracę w tym samym momencie)**

Zastosowanie wielomianów 3-go stopnia w planowaniu trajektorii



Trajektorie powinny spełniać następujące warunki ograniczające:

$\theta(0) = \theta_0$ $\quad \theta(t_k)=\theta_k$

$\dot{\theta}(0) = 0$ $\quad$ **oraz zazwyczaj** $\quad \dot{\theta}(t_k)=0$

Cztery warunki oznaczają, że trajektoria może być opisana wielomianem stopnia co najmniej trzeciego

Zastosowanie wielomianów 3-go stopnia w planowaniu trajektorii – c.d.

Wielomian 3-go stopnia: $\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

więc jego pochodna: $\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

Z warunków ograniczających wynika:

$$\begin{cases} \theta(0) = a_0 = \theta_0 \\ \theta(t_k) = a_0 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3 = \theta_k \\ \dot{\theta}(0) = a_1 = 0 \\ \dot{\theta}(t_k) = a_1 + 2a_2 t_k + 3a_3 t_k^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \theta_0 \\ a_1 = 0 \\ \theta_k = \theta_0 + a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3 \\ 0 = 2a_2 t_k + 3a_3 t_k^2 \end{cases}$$

stąd:

$$\left.\begin{cases} \underline{a_0 = \theta_0} \\ \underline{a_1 = 0} \\ \theta_k - \theta_0 = a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3 \\ a_3 = -\dfrac{2a_2}{3t_k} \end{cases}\right\} \Rightarrow \theta_k - \theta_0 = a_2 t_k^2 - \frac{2a_2 t_k^3}{3t_k}$$

Zastosowanie wielomianów 3-go stopnia w planowaniu trajektorii – c.d.

więc: $\theta_k - \theta_0 = a_2 t_k^2 - \frac{2}{3} \cdot a_2 t_k^2 = \frac{1}{3} a_2 t_k^2$

$$\Downarrow$$

$$a_2 = \frac{3 \cdot (\theta_k - \theta_0)}{t_k^2}$$

$$a_3 = -\frac{2a_2}{3t_k} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot (\theta_k - \theta_0)}{3 \cdot t_k \cdot t_k^2} = \frac{2 \cdot (\theta_0 - \theta_k)}{t_k^3}$$

Podsumowując:

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \dfrac{3 \cdot (\theta_k - \theta_0)}{t_k^2} \\ a_3 = \dfrac{2 \cdot (\theta_0 - \theta_k)}{t_k^3} \end{cases}$$

Zastosowanie wielomianów 3-go stopnia w planowaniu trajektorii – c.d.

Trajektoria dla pojedynczego przegubu:

Przebieg zmiennej konfiguracyjnej:

$$\theta(t) = \theta_0 + 3\cdot(\theta_k - \theta_0)\cdot\frac{t^2}{t_k^2} + 2\cdot(\theta_0 - \theta_k)\cdot\frac{t^3}{t_k^3}$$

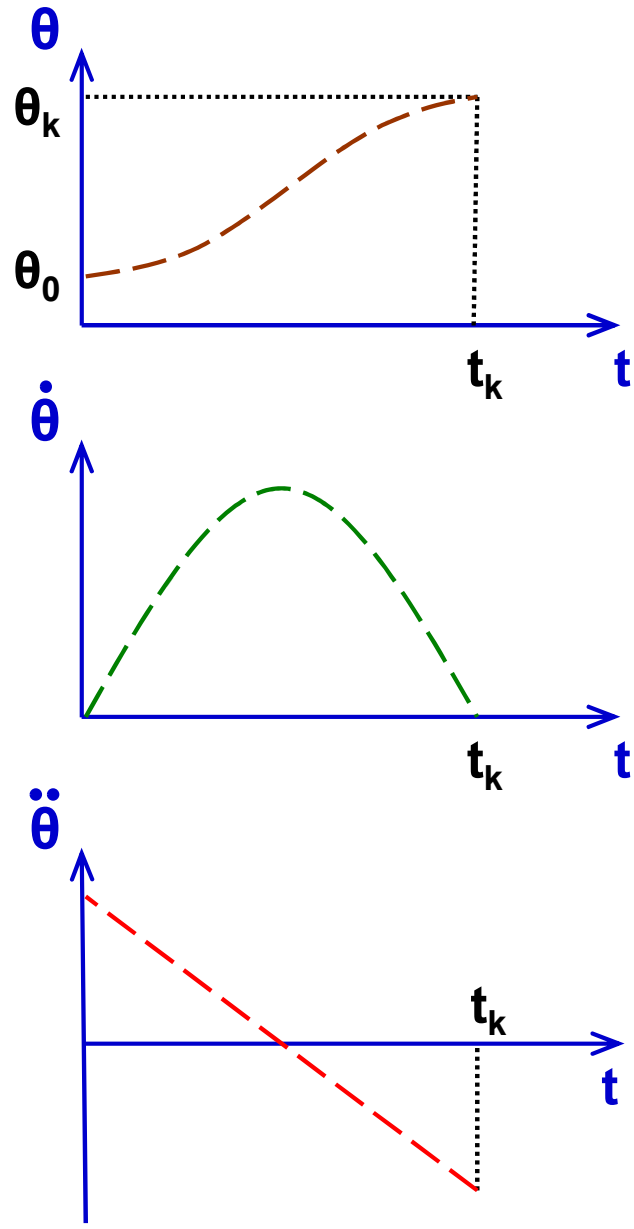
Przebieg prędkości:

$$\dot{\theta}(t) = 6\cdot(\theta_k - \theta_0)\cdot\frac{t}{t_k^2} + 6\cdot(\theta_0 - \theta_k)\cdot\frac{t^2}{t_k^3}$$

Przebieg przyspieszenia:

$$\ddot{\theta}(t) = 2\cdot a_2 + 6\cdot a_3\cdot t = \frac{6\cdot(\theta_k - \theta_0)}{t_k^2} + 12\cdot(\theta_0 - \theta_k)\cdot\frac{t}{t_k^3}$$

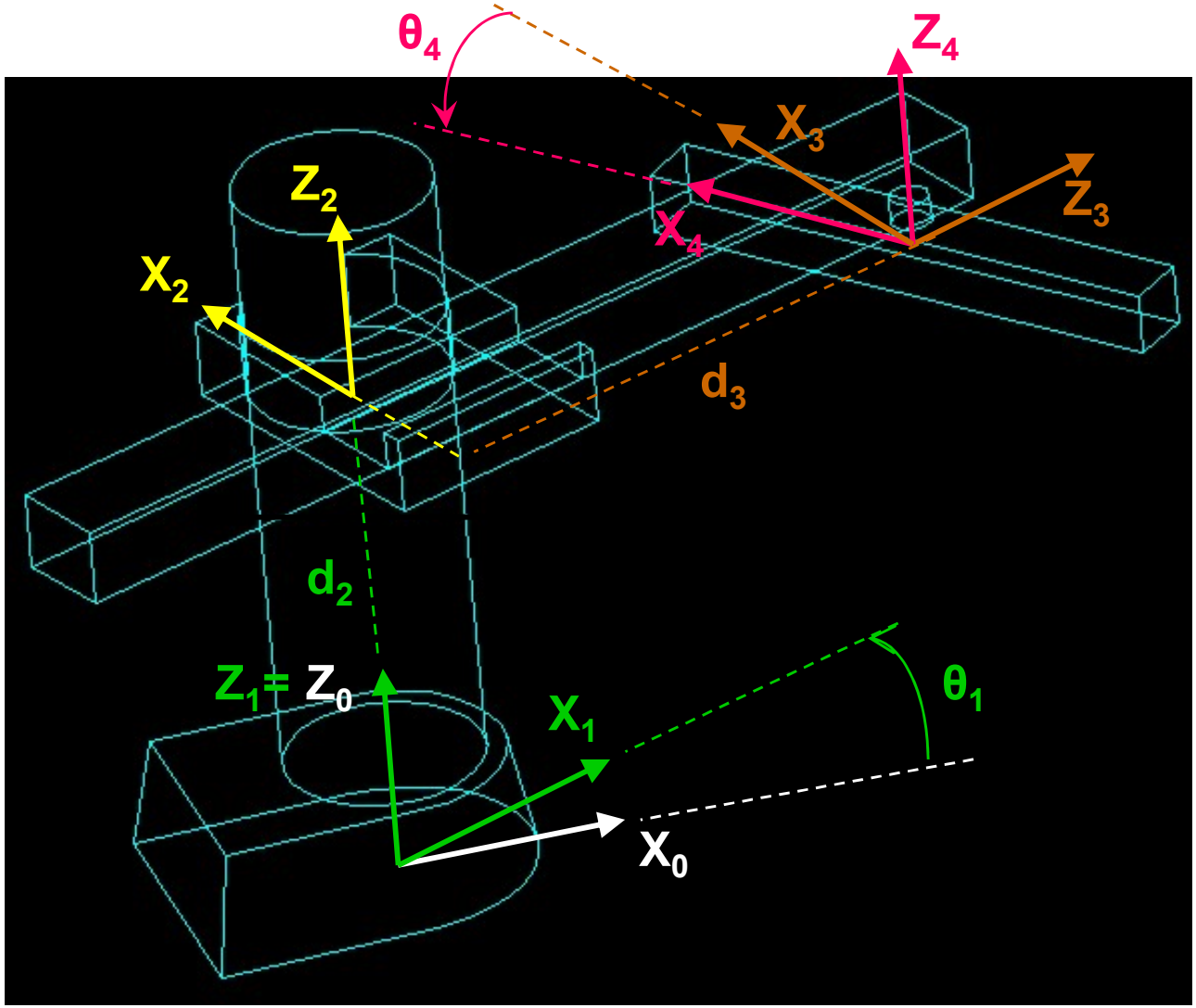
$$\ddot{\theta}(0) = \frac{6\cdot(\theta_k - \theta_0)}{t_k^2} \qquad \ddot{\theta}(t_k) = \frac{6\cdot(\theta_0 - \theta_k)}{t_k^2}$$



Opis trajektorii w systemie modelowania z użyciem wielomianu 3-go stopnia

```
tk1 := …
tk2 := …
tk3 := …
REPEAT
    dt1:= tk1 – TSTART (RAMIE1)
    dt2:= tk2 – TSTART (RAMIE2)
    dt3:= tk3 – TSTART (RAMIE3)
    MOVE ( RAMIE1, 3 * dt1 * L() * L() – 2 * dt1 * L() * L() * L() )
    MOVE ( RAMIE2, 3 * dt2 * L() * L() – 2 * dt2 * L() * L() * L() )
    MOVE ( RAMIE3, 3 * dt3 * L() * L() – 2 * dt3 * L() * L() * L() )
UNTIL DONE ()
```

Realizacja instrukcji pozycjonowania dla zadanych współrzędnych konfiguracyjnych




```
procedure mj
parameters alfa,H,L,beta
dalfa := – alfa – tstart(column)
dh := H – tstart(slider)
dl := L – tstart(arm)
dbeta := – beta – tstart(efector)
repeat
 move(column, (3*dalfa*l() –
2*dalfa*l()*l())*l())
 move(slider, (3*dh*l() – 2*dh*l()*l())*l())
 move(arm, (3*dl*l() – 2*dl*l()*l())*l())
 move(efector, (3*dbeta*l() –
2*dbeta*l()*l())*l())
until  done ()
endproc
```

Zasady opisu rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki w systemie modelowania

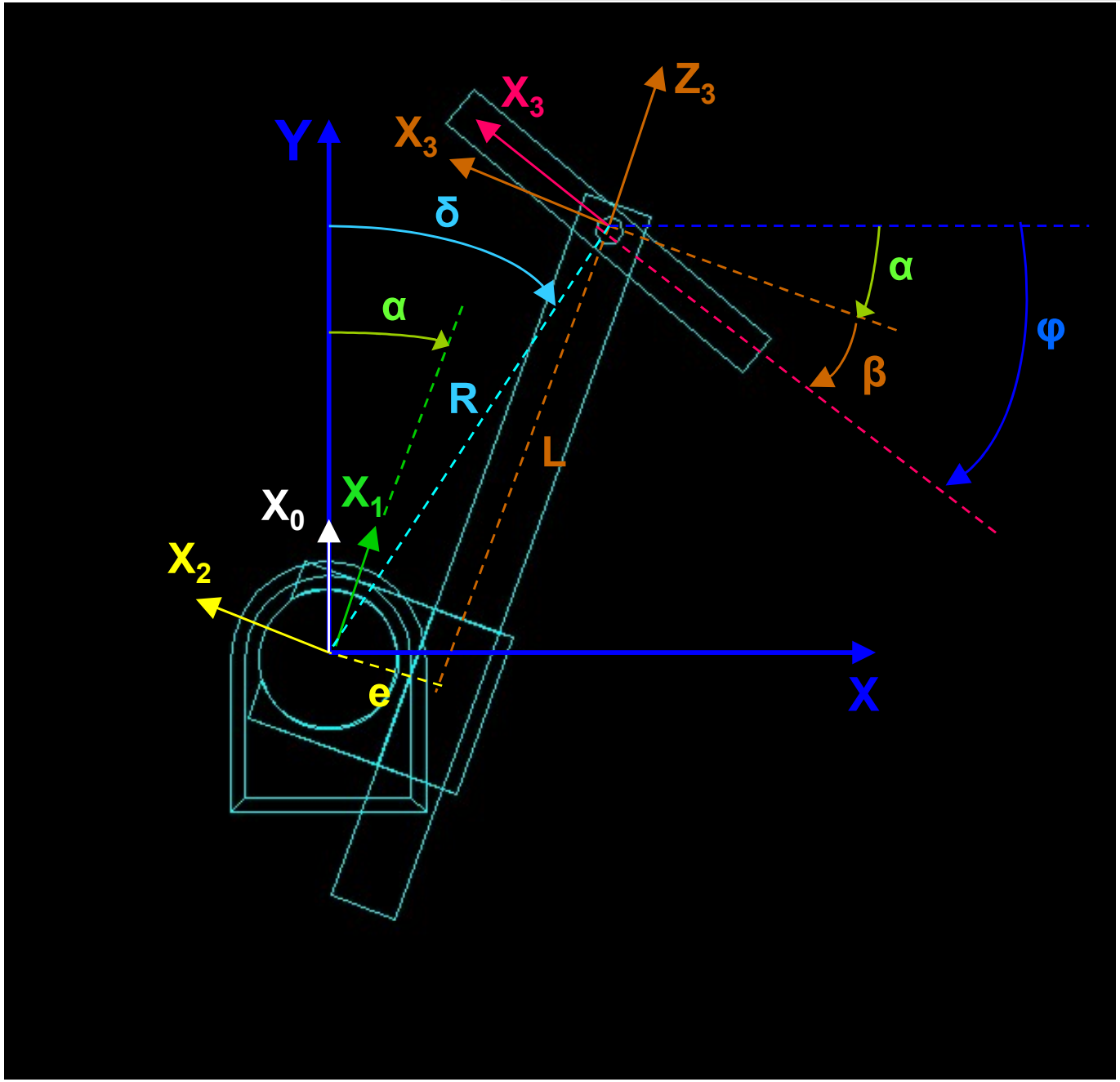
Aby zrealizować ruch efektora robota do określonych współrzędnych kartezjańskich, należy na podstawie tych współrzędnych obliczyć pożądane przyrosty wszystkich zmiennych konfiguracyjnych a następnie wywołać pętlę opisującą przemieszczenie złożone np.:

```
PROCEDURE GOTO
PARAMETERS X, Y, Z, A, B, C

dt1 := f ( X, Y, Z, A, B, C)
dt2 := f ( X, Y, Z, A, B, C)
   …
dtn := f ( X, Y, Z, A, B, C)

REPEAT
      MOVE ( <nazwa członu 1> , f (dt1, L() ) )
      MOVE ( <nazwa członu 2> , f (dt2, L() ) )
          …
      MOVE ( <nazwa członu N> , f ( dtn, L() ) )
 UNTIL DONE ()
```

Rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki dla przykładowego robota



Dane: x, y, z, φ

Szukane: α, H, L, β

$H = z$

$\delta = \arctan2(x, y)$

$R = \sqrt{x^2 + y^2}$

$L = \sqrt{R^2 - e^2}$

$\alpha = \delta - \arctan2(e, L)$

$\beta = \varphi - \alpha$

Realizacja instrukcji pozycjonowania dla zadanych współrzędnych kartezjańskich

$H = z$

$\delta = \text{arctan2}\,(x, y)$

$R = \sqrt{x^2 + y^2}$

$L = \sqrt{R^2 - e^2}$

$\alpha = \delta - \text{arctan2}\,(e, L)$

$\beta = \varphi - \alpha$

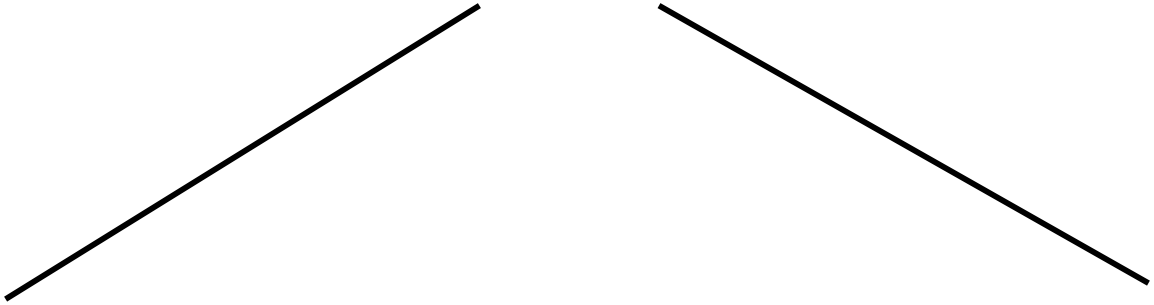
```
procedure mp
parameters x,y,z,fi
delta := arctan2 (x, y)
R2 := x*x + y*y
e := 42.5
L := sqrt (R2 – e*e)
alfa:=delta – arctan2 (e, L)
if alfa >180°
 alfa := alfa – 360°
endif
beta := fi – alfa
if beta >180°
 beta := beta – 360°
endif
if beta < –180°
 beta := beta +360°
endif
call mj (-alfa, z, L, -beta)
endproc
```

Demonstracja

Wielomiany 3-go stopnia dla trajektorii z pozycjami pośrednimi

Wariant 1 – zatrzymanie w pozycji pośredniej: zagadnienie sprowadza się do poprzedniego rozwiązania

Wariant 2 – bez zatrzymywania w pozycji pośredniej



prędkość w pozycji pośredniej zadawana przez użytkownika

prędkość w pozycji pośredniej obliczana automatycznie

Wielomiany 3-go stopnia: prędkości w pozycjach pośrednich zadawane ręcznie

Dla tego wariantu trajektorię rozbijamy na trajektorie elementarne (pozycja początkowa → 1-sza pozycja pośrednia, 1-sza pozycja pośrednia → 2-ga pozycja pośrednia, … , ostatnia pozycja pośrednia → pozycja końcowa), każdą z nich obliczając jak poprzednio, choć z nieco innymi warunkami brzegowymi:

$$\theta(0)=\theta_0 \quad \dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0 \quad \theta(t_k)=\theta_k \quad \dot{\theta}(t_k)=\dot{\theta}_k$$

$$\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

$$\dot{\theta}(t)=a_1+2a_2t+3a_3t^2$$

$$\begin{cases} \theta_0=a_0 \\ \dot{\theta}_0=a_1 \\ \theta_k=\theta_0+\dot{\theta}_0\cdot t_k+a_2t_k^2+a_3t_k^3 \\ \dot{\theta}_k=\dot{\theta}_0+2a_2t_k+3a_3t_k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_0=a_0 \\ \dot{\theta}_0=a_1 \\ \theta_k-\theta_0=\dot{\theta}_0t_k+a_2t_k^2+a_3t_k^3 \\ 3a_3t_k^2=\dot{\theta}_k-\dot{\theta}_0-2a_2t_k \end{cases} \Rightarrow a_3=\frac{\dot{\theta}_k-\dot{\theta}_0}{3t_k^2}-\frac{2a_2t_k}{3t_k^2}$$

Wielomiany 3-go stopnia: prędkości w pozycjach pośrednich zadawane ręcznie – c.d.

$$\theta_k-\theta_0=\dot{\theta}_0 t_k+a_2 t_k^2+a_3 t_k^3 \qquad a_3=\frac{\dot{\theta}_k-\dot{\theta}_0}{3t_k^2}-\frac{2a_2}{3t_k}$$

$$\theta_k-\theta_0=\dot{\theta}_0 t_k+a_2 t_k^2+\frac{(\dot{\theta}_k-\dot{\theta}_0)\cdot t_k}{3}-\frac{2a_2 t_k^2}{3}$$

$$\theta_k-\theta_0=\frac{(3\dot{\theta}_0+\dot{\theta}_k-\dot{\theta}_0)\cdot t_k}{3}+\frac{a_2 t_k^2}{3}$$

$$\frac{a_2 t_k^2}{3}=\frac{3\cdot(\theta_k-\theta_0)}{3}-\frac{(\dot{\theta}_k+2\dot{\theta}_0)\cdot t_k}{3}$$

$$a_2=\frac{3\cdot(\theta_k-\theta_0)}{t_k^2}-\frac{\dot{\theta}_k}{t_k}-\frac{2\cdot\dot{\theta}_0}{t_k}$$

$$a_3=\frac{\dot{\theta}_k-\dot{\theta}_0}{3t_k^2}-\frac{2a_2}{3t_k}=\frac{\dot{\theta}_k-\dot{\theta}_0}{3t_k^2}-\frac{2\cdot(\theta_k-\theta_0)}{t_k^3}+\frac{2\cdot\dot{\theta}_k}{3\cdot t_k^2}+\frac{4\cdot\dot{\theta}_0}{3\cdot t_k^2}=$$

$$=\frac{2\cdot(\theta_0-\theta_k)}{t_k^3}+\frac{3\cdot\dot{\theta}_k+3\cdot\dot{\theta}_0}{3\cdot t_k^2}=\frac{2\cdot(\theta_0-\theta_k)}{t_k^3}+\frac{\dot{\theta}_0+\dot{\theta}_k}{t_k^2}$$

Wielomiany 3-go stopnia: prędkości w pozycjach pośrednich zadawane ręcznie – c.d.

Podsumowując:

$$a_0 = \theta_0 \qquad a_1 = \dot{\theta}_0$$

$$a_2 = \frac{3\cdot(\theta_k - \theta_0)}{t_k^2} - \frac{\dot{\theta}_k}{t_k} - \frac{2\cdot\dot{\theta}_0}{t_k}$$

$$a_3 = \frac{2\cdot(\theta_0 - \theta_k)}{t_k^3} + \frac{\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_k}{t_k^2}$$

Algorytm postępowania:

- **Zadaje się wektor prędkości V w każdej pozycji pośredniej**
- **Dla wszystkich pozycji oblicza się $\dot{\theta} = f(V)$ (odwrotne zad. kinem. dla prędkości)**
- **Dla każdego odcinka oblicza się trajektorię według podanych wzorów**
- **W niektórych przypadkach trzeba uwzględnić ograniczenia dotyczące prędkości (zwłaszcza w pobliżu osobliwości)**

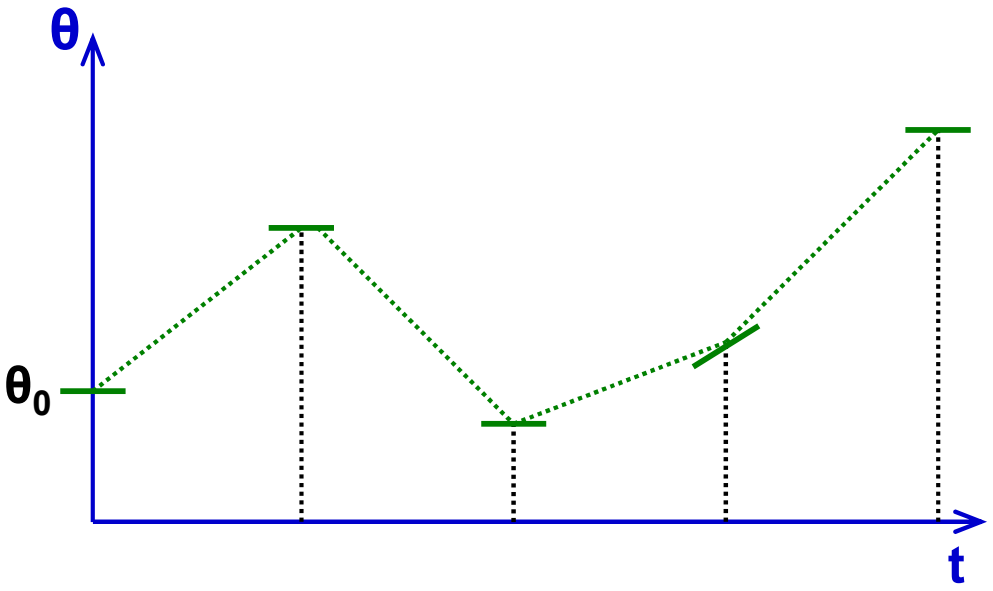
Wielomiany 3-go stopnia: prędkości w pozycjach pośrednich obliczane automatycznie

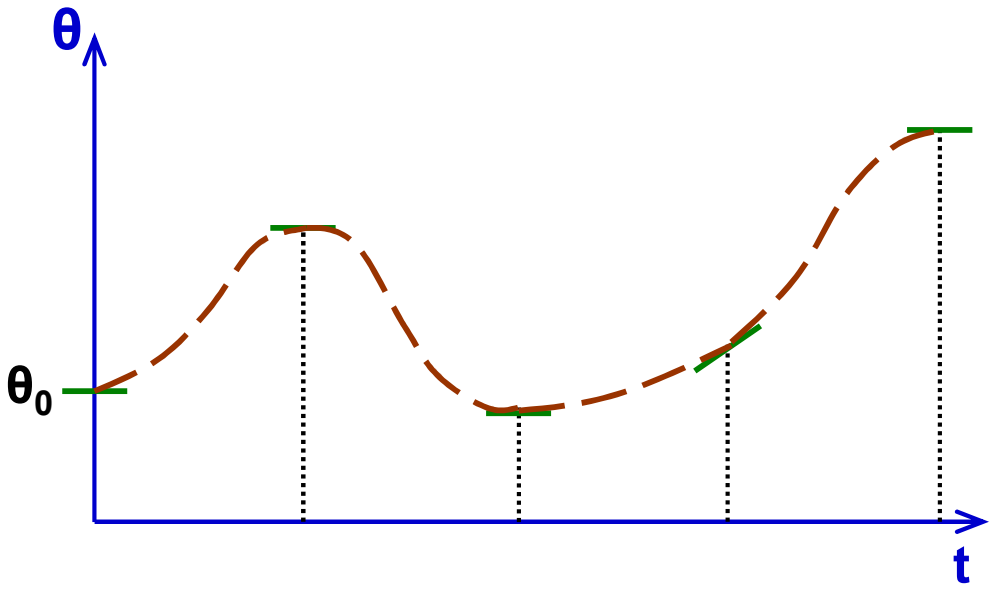
Postępowanie przy automatycznym obliczaniu prędkości w pozycjach pośrednich:

- **Przeważnie stosuje się algorytmy heurystyczne (z czego wynika uzyskanie rozwiązania niekoniecznie optymalnego)**
- **Zazwyczaj dąży się do zapewnienia ciągłości przyspieszeń w pozycjach pośrednich**

Przykładowy algorytm heurystyczny

Dla poszczególnych pozycji wyznacza się w układzie współrzędnych θ – t styczne do trajektorii w zadanych pozycjach:



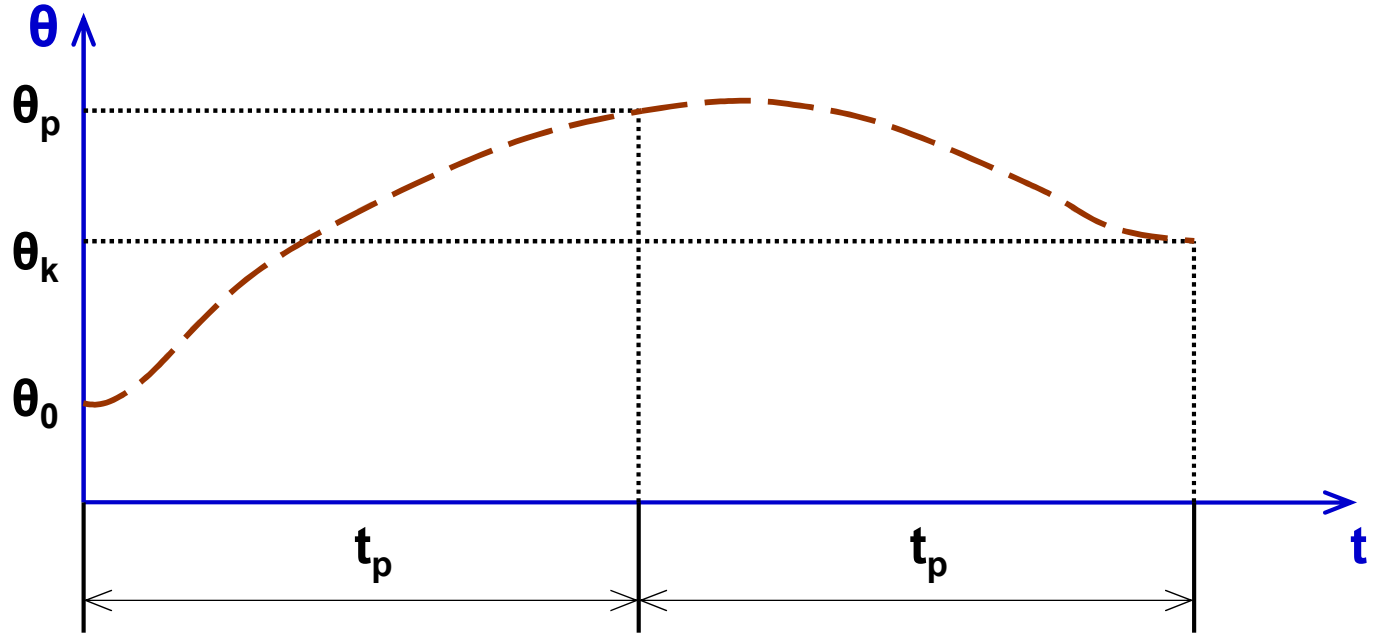


Zasady:

- **Jeśli następuje zmiana kierunku ruchu, to styczna jest pozioma (prędkość = 0)**
- **Gdy nie ma zmiany kierunku ruchu, to styczna jest nachylona do osi „t” pod kątem będącym średnią arytmetyczną kątów, pod jakimi są nachylone odcinki łączące punkt trajektorii odpowiadający danej pozycji z punktami odpowiadającymi pozycji poprzedniej i następnej**

Wielomiany 3-go stopnia a ciągłość przyspieszenia w pozycji pośredniej

Załóżmy taki sam odstęp czasowy t_p pomiędzy pozycją początkową i pośrednią oraz pośrednią i końcową:



Wielomian dla trajektorii $\theta_0 - \theta_p$:

$$\theta_1(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$
$$\dot{\theta}_1(t) = a_{11} + 2a_{12}t + 3a_{13}t^2$$
$$\ddot{\theta}_1(t) = 2a_{12} + 6a_{13}t$$

Wielomian dla trajektorii $\theta_p - \theta_k$:

$$\theta_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$
$$\dot{\theta}_2(t) = a_{21} + 2a_{22}t + 3a_{23}t^2$$
$$\ddot{\theta}_2(t) = 2a_{22} + 6a_{23}t$$

Wielomiany 3-go stopnia a ciągłość przyspieszenia w pozycji pośredniej – c.d.

Dla zapewnienia prostoty obliczeń, każdy z wielomianów rozpatrujemy w dziedzinie $<0 , t_p>$.

Warunki ograniczające:

① $\theta_1(0)=\theta_0=a_{10}$

② $\theta_1(t_p)=\theta_p=a_{10}+a_{11}t_p+a_{12}t_p^2+a_{13}t_p^3$

③ $\theta_2(0)=\theta_p=a_{20}$

④ $\theta_2(t_p)=\theta_k=a_{20}+a_{21}t_p+a_{22}t_p^2+a_{23}t_p^3$

⑤ $\dot{\theta}_1(0)=0=a_{11}$

⑥ $\dot{\theta}_2(t_p)=0=a_{21}+2a_{22}t_p+3a_{23}t_p^2$

⑦ $\dot{\theta}_1(t_p)=\dot{\theta}_2(0) \Rightarrow a_{11}+2a_{12}t_p+3a_{13}t_p^2=a_{21}$

⑧ $\ddot{\theta}_1(t_p)=\ddot{\theta}_2(0) \Rightarrow 2a_{12}+6a_{13}t_p=2a_{22}$

Stąd współczynniki: $a_{10}=\theta_0 \quad a_{20}=\theta_p \quad a_{11}=0$

Wielomiany 3-go stopnia a ciągłość przyspieszenia w pozycji pośredniej – c.d.

Z równań 1,2 i 5: $\theta_p = \theta_0 + a_{12} t_p^2 + a_{13} t_p^3 \Rightarrow a_{13} = \frac{\theta_p - \theta_0}{t_p^3} - \frac{a_{12}}{t_p}$

Z równań 3 i 4: ⑨ $\theta_k = \theta_p + a_{21} t_p + a_{22} t_p^2 + a_{23} t_p^3$

Równanie 6: ⑩ $0 = a_{21} + 2a_{22} t_p + 3a_{23} t_p^2$

Z równań 5 i 7: $2a_{12} t_p + 3a_{13} t_p^2 = a_{21}$

Równanie 8: $2a_{12} + 6a_{13} t_p = 2a_{22}$

$$2a_{12} + \frac{6 \cdot (\theta_p - \theta_0)}{t_p^2} - 6a_{12} = 2a_{22}$$

⑪ $$a_{22} = \frac{3 \cdot (\theta_p - \theta_0)}{t_p^2} - 2a_{12}$$

$$2a_{12} t_p + \frac{3(\theta_p - \theta_0)}{t_p} - 3a_{12} t_p = a_{21}$$

⑫ $$a_{21} = \frac{3(\theta_p - \theta_0)}{t_p} - a_{12} t_p$$

Wielomiany 3-go stopnia a ciągłość przyspieszenia w pozycji pośredniej – c.d.

Z równań 10, 11 i 12:

$$a_{23}t_p^2 = -\frac{a_{21}}{3} - \frac{2a_{22}t_p}{3} = \frac{a_{12}t_p}{3} + \frac{\theta_0-\theta_p}{t_p} + \frac{4a_{12}t_p}{3} + \frac{2(\theta_0-\theta_p)}{t_p}$$

$$\textcircled{13}\quad a_{23}t_p^2 = \frac{3(\theta_0-\theta_p)}{t_p} + \frac{5a_{12}t_p}{3}$$

Z równania 9:

$$\theta_k - \theta_p = a_{21}t_p + a_{22}t_p^2 + a_{23}t_p^2 \cdot t_p$$

Uwzględniając 11, 12 i 13:

$$\theta_k - \theta_p = 3(\theta_p-\theta_0) - a_{12}t_p^2 + \cancel{3(\theta_p-\theta_0)} - 2a_{12}t_p^2 + \cancel{3(\theta_0-\theta_p)} + \frac{5a_{12}t_p^2}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$3a_{12}t_p^2 + 6a_{12}t_p^2 - 5a_{12}t_p^2 = 9(\theta_p-\theta_0) + 3(\theta_p-\theta_k)$$

$$\Downarrow$$

$$4a_{12}t_p^2 = 9(\theta_p-\theta_0) + 3(\theta_p-\theta_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\textcircled{14}\quad a_{12} = \frac{9(\theta_p-\theta_0) + 3(\theta_p-\theta_k)}{4t_p^2}$$

Wielomiany 3-go stopnia a ciągłość przyspieszenia w pozycji pośredniej – c.d.

Jak wykazano wcześniej: $a_{13} = \frac{\theta_p - \theta_0}{t_p^3} - \frac{a_{12}}{t_p}$

więc: $\underline{a_{13} = \frac{4\cdot(\theta_p-\theta_0) - 9(\theta_p-\theta_0) + 3(\theta_k-\theta_p)}{4t_p^3} = \frac{5(\theta_0-\theta_p)+3(\theta_k-\theta_p)}{4t_p^3}}$

Z równań 12 i 14:

$$a_{21} = \frac{3\cdot(\theta_p-\theta_0)}{t_p} - a_{12}t_p = \frac{12(\theta_p-\theta_0) - 9(\theta_p-\theta_0) + 3(\theta_k-\theta_p)}{4t_p} = \frac{3(\theta_p-\theta_0)+3(\theta_k-\theta_p)}{4t_p}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a_{21} = \frac{3(\theta_k-\theta_0)}{4t_p}}$$

Z równań 11 i 14:

$$a_{22} = \frac{3(\theta_p-\theta_0)}{t_p^2} - 2a_{12} = \frac{6(\theta_p-\theta_0) - 9(\theta_p-\theta_0) + 3(\theta_k-\theta_p)}{2t_p^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a_{22} = \frac{3(\theta_0-\theta_p)+3(\theta_k-\theta_p)}{2t_p^2}}$$

Wielomiany 3-go stopnia a ciągłość przyspieszenia w pozycji pośredniej – c.d.

Na podstawie równań 13 i 14:

$$a_{23} = \frac{3(\theta_0 - \theta_p)}{t_p^3} + \frac{5a_{12}}{3t_p} = \frac{36(\theta_0 - \theta_p) + 45(\theta_p - \theta_0) + 15(\theta_p - \theta_k)}{12t_p^3}$$

$$a_{23} = \frac{9(\theta_p - \theta_0) + 15(\theta_p - \theta_k)}{12t_p^3}$$

$$a_{23} = \frac{3(\theta_p - \theta_0) + 5(\theta_p - \theta_k)}{4t_p^3}$$

Podsumowując:

$$a_{10} = \theta_0$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{12} = \frac{9(\theta_p - \theta_0) + 3(\theta_p - \theta_k)}{4t_p^2}$$

$$a_{13} = \frac{5(\theta_0 - \theta_p) + 3(\theta_k - \theta_p)}{4t_p^3}$$

$$a_{20} = \theta_p$$

$$a_{21} = \frac{3(\theta_k - \theta_0)}{4t_p}$$

$$a_{22} = \frac{3(\theta_0 - \theta_p) + 3(\theta_k - \theta_p)}{2t_p^2}$$

$$a_{23} = \frac{3(\theta_p - \theta_0) + 5(\theta_p - \theta_k)}{4t_p^3}$$

Wielomiany 3-go stopnia a ciągłość przyspieszenia w pozycji pośredniej – c.d.

Przy planowaniu trajektorii z wykorzystaniem wielomianu o współczynnikach obliczonych według wyprowadzonych wzorów, prędkość połączenia ruchowego w położeniu pośrednim będzie:

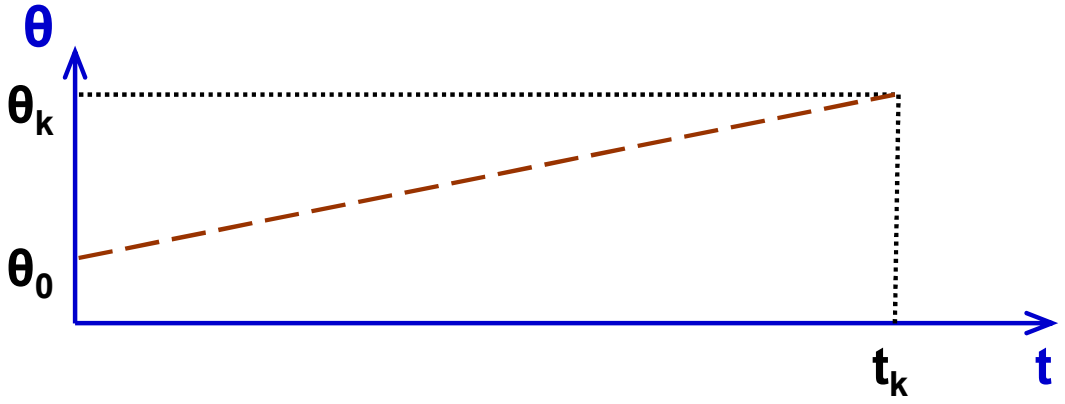
$$\dot{\theta}_2(0) = a_{21} = \frac{3(\theta_k - \theta_0)}{4t_p}$$

Przykład generowania trajektorii dla manipulatora dwuczłonowego

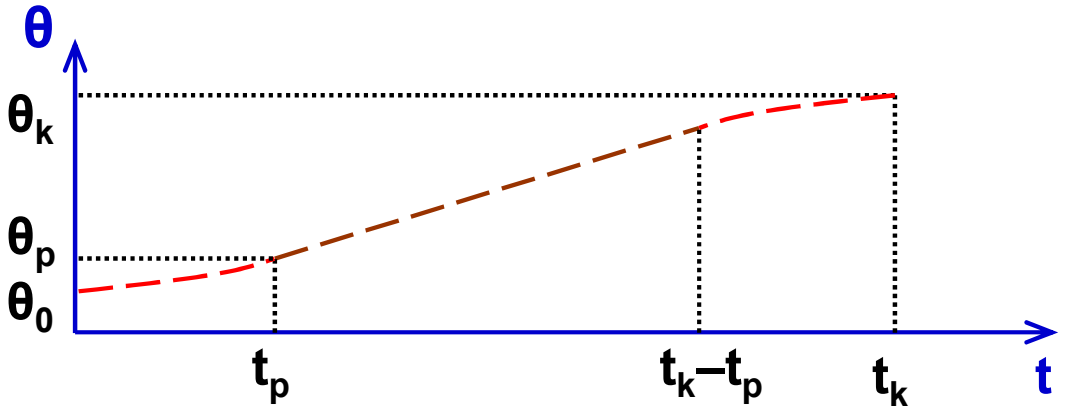
Proszę spróbować opracować to samodzielnie.

Generowanie trajektorii z wykorzystaniem funkcji liniowej łączonej z fragmentami parabolicznymi

Zastosowanie samej funkcji liniowej przy generowaniu trajektorii nie zapewnia ciągłości funkcji prędkości:



Dlatego dodajemy fragmenty paraboliczne. Prędkość w chwili t_p oraz $(t_k–t_p)$ musi być taka sama w części liniowej i parabolicznej:



Zastosowanie funkcji liniowej łączonej z fragmentami parabolicznymi – c.d.

Na fragmentach parabolicznych zakładamy stałe przyspieszenie $\ddot{\theta}_p$ o wartości a_p: $\ddot{\theta}_p = a_p \cdot sign(\theta_k - \theta_0)$

Wówczas w chwili t_p rozwijana jest prędkość:

$$\dot{\theta}_p = \ddot{\theta}_p \cdot t_p$$

Prędkość ta musi być równa prędkości na odcinku liniowym:

$$\dot{\theta}_p = \frac{\theta_k - \theta_0 - 2\cdot(\theta_p - \theta_0)}{t_k - 2\cdot t_p} = \frac{\theta_k + \theta_0 - 2\cdot\theta_p}{t_k - 2\cdot t_p}$$

Zatem: $$\ddot{\theta}_p \cdot t_p = \frac{\theta_k + \theta_0 - 2\cdot\theta_p}{t_k - 2\cdot t_p}$$

Chcemy obliczyć t_p. W powyższej zależności występuje wartość θ_p, którą można obliczyć ze wzoru:

$$\theta_p = \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}_p \cdot t_p^2}{2}$$

Zastosowanie funkcji liniowej łączonej z fragmentami parabolicznymi – c.d.

Stąd:

$$\ddot{\theta}_p \cdot t_p = \frac{\theta_k + \theta_0 - 2\cdot\theta_0 - \ddot{\theta}_p \cdot t_p^2}{t_k - 2\cdot t_p}$$

$$\ddot{\theta}_p \cdot t_p \cdot (t_k - 2\cdot t_p) = \theta_k - \theta_0 - \ddot{\theta}_p \cdot t_p^2$$

$$-\ddot{\theta}_p \cdot t_p^2 - \ddot{\theta}_p \cdot t_p \cdot t_k + 2\cdot\ddot{\theta}_p \cdot t_p^2 + \theta_k - \theta_0 = 0$$

$$\ddot{\theta}_p \cdot t_p^2 - \ddot{\theta}_p \cdot t_k \cdot t_p + \theta_k - \theta_0 = 0$$

$$\Delta = \ddot{\theta}_p^2 \cdot t_k^2 - 4\cdot\ddot{\theta}_p \cdot (\theta_k - \theta_0)$$

Aby istniało rozwiązanie, musi być $\Delta \geq 0$:

$$\ddot{\theta}_p^2 \cdot t_k^2 \geqslant 4\cdot\ddot{\theta}_p \cdot (\theta_k - \theta_0)$$

Dla: $\ddot{\theta}_p > 0 \ (\theta_k > \theta_0) \Rightarrow \ddot{\theta}_p \cdot t_k^2 \geqslant 4\cdot(\theta_k - \theta_0) \Rightarrow \ddot{\theta}_p \geqslant \frac{4\cdot(\theta_k - \theta_0)}{t_k^2}$

Dla: $\ddot{\theta}_p < 0 \ (\theta_k < \theta_0) \Rightarrow \ddot{\theta}_p \cdot t_k^2 \leqslant 4\cdot(\theta_k - \theta_0) \Rightarrow \ddot{\theta}_p \leqslant \frac{4\cdot(\theta_k - \theta_0)}{t_k^2}$

Zastosowanie funkcji liniowej łączonej z fragmentami parabolicznymi – c.d.

Zatem w obu przypadkach: $|\ddot{\theta}_p| = a_p \geq \frac{4 \cdot |\theta_k - \theta_0|}{t_k^2}$

Możliwe rozwiązania: $t_{p1} = \frac{\ddot{\theta}_p \cdot t_k + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \ddot{\theta}_p}$ $\quad t_{p2} = \frac{\ddot{\theta}_p \cdot t_k - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \ddot{\theta}_p}$

Czas trwania przyspieszenia t_p nie może być większy od połowy t_k:

$$t_p \leq \frac{1}{2} \cdot t_k$$

Dalsze rozważania dla przypadku: $\ddot{\theta}_p > 0$

$$t_{p1} = \frac{\ddot{\theta}_p \cdot t_k + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \ddot{\theta}_p} \leq \frac{t_k}{2} \Rightarrow \ddot{\theta}_p \cdot t_k + \sqrt{\Delta} \leq \ddot{\theta}_p \cdot t_k \Rightarrow \sqrt{\Delta} \leq 0$$

Zatem pierwiastek t_{p1} spełnia warunek tylko dla $\Delta = 0$

$$t_{p2} = \frac{\ddot{\theta}_p \cdot t_k - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \ddot{\theta}_p} \leq \frac{t_k}{2} \Rightarrow \ddot{\theta}_p \cdot t_k - \sqrt{\Delta} \leq \ddot{\theta}_p \cdot t_k \Rightarrow -\sqrt{\Delta} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \geq 0$$

Zatem pierwiastek t_{p2} spełnia warunek zawsze, gdy $\Delta \geq 0$

Zastosowanie funkcji liniowej łączonej z fragmentami parabolicznymi – c.d.

Stąd rozwiązanie:

$$t_p = \frac{\ddot{\theta}_p \cdot t_k - \sqrt{\ddot{\theta}_p^2 \cdot t_k^2 - 4 \cdot \ddot{\theta}_p \cdot (\theta_k - \theta_0)}}{2 \cdot \ddot{\theta}_p}$$

$$\Downarrow$$

$$t_p = \frac{t_k}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}_p^2 \cdot t_k^2 - 4 \cdot \ddot{\theta}_p \cdot (\theta_k - \theta_0)}}{2 \cdot \ddot{\theta}_p}$$

przy założeniu, że przyspieszenie musi mieć wartość co najmniej:

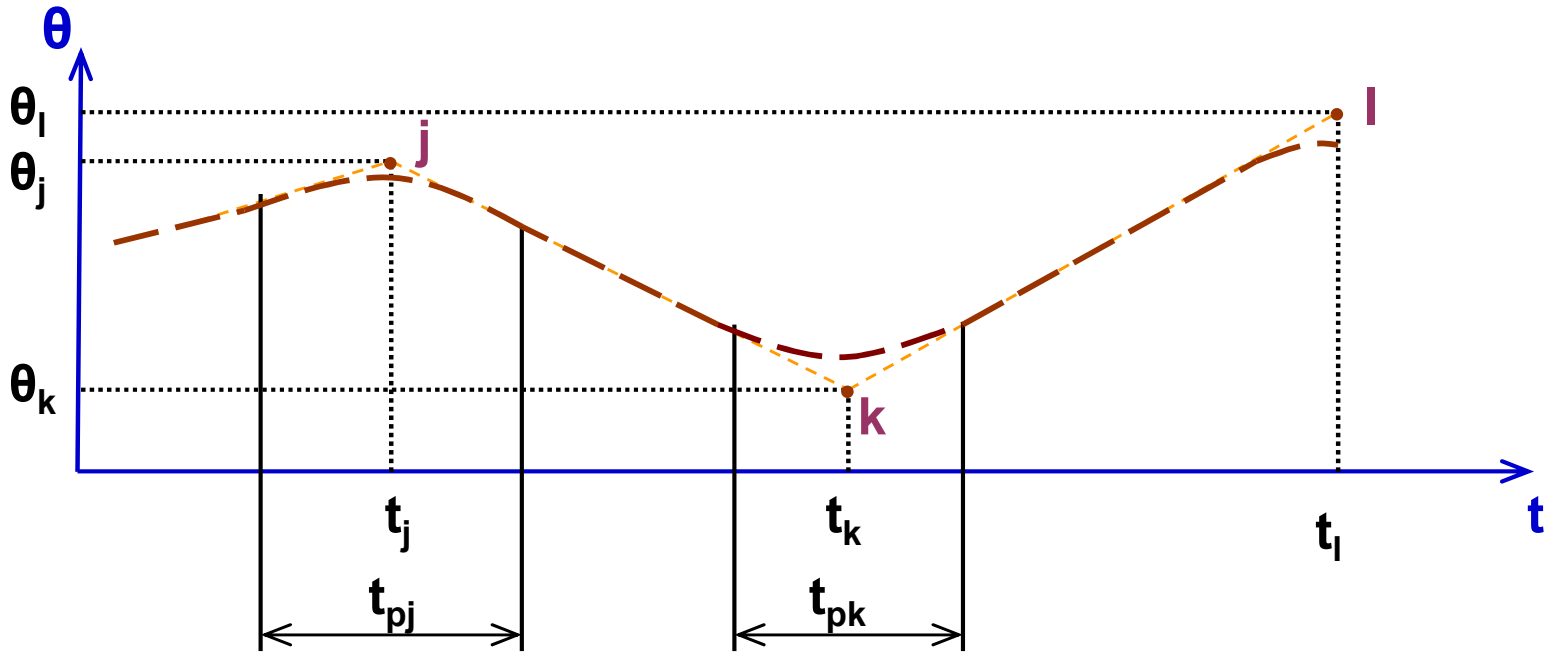
$$\ddot{\theta}_p \geq \frac{4 \cdot (\theta_k - \theta_0)}{t_k^2}$$

Przypadek skrajny (brak fragmentu liniowego):

$$\ddot{\theta}_p = \frac{4 \cdot (\theta_k - \theta_0)}{t_k^2}$$

(Rozważania dla przypadku $\ddot{\theta}_p < 0$ proszę przeprowadzić samodzielnie)

Funkcja liniowa z fragmentami parabolicznymi: uwzględnienie punktów pośrednich



Załóżmy, że przyspieszenie na parabolicznym fragmencie trajektorii w pobliżu punktu k wynosi a_k.

Prędkości na odcinkach liniowych pomiędzy j i k oraz k i l wynoszą:

$$\dot{\theta}_{jk} = \frac{\theta_k - \theta_j}{t_k - t_j} \qquad \dot{\theta}_{kl} = \frac{\theta_l - \theta_k}{t_l - t_k}$$

Funkcja liniowa z fragmentami parabolicznymi: uwzględnienie punktów pośrednich – c.d.

Chcemy obliczyć t_{pk}. Korzystamy ze wzoru na przyspieszenie na fragmencie parabolicznym w pobliżu punktu k:

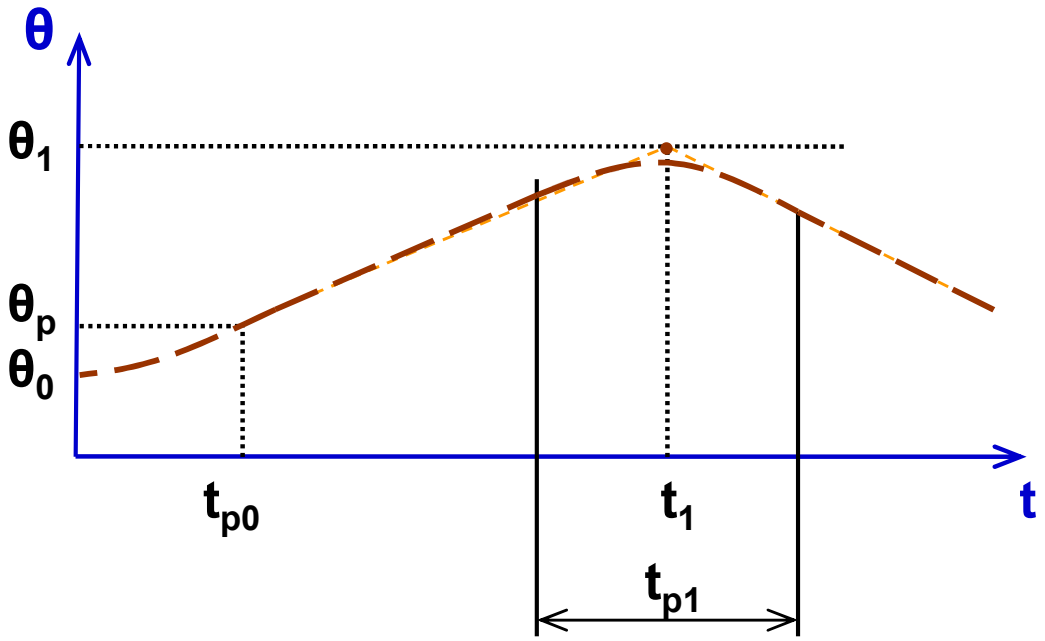
$$\ddot{\theta}_k = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{t_{pk}} \quad \Rightarrow \quad t_{pk} = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k}$$

a ponieważ: $\ddot{\theta}_k = a_k \cdot sign\left(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}\right)$

więc: $$t_{pk} = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{a_k \cdot sign\left(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}\right)}$$

Funkcja liniowa z fragmentami parabolicznymi: uwzględnienie punktów pośrednich – c.d.

Szczególna sytuacja odnosi się do położenia pierwszego i ostatniego (w położeniach tych prędkość jest równa zeru):



Dla pierwszego fragmentu parabolicznego zakładamy przyspieszenie o wartości bezwzględnej a_0:

$$\ddot{\theta}_0 = a_0 \cdot sign(\theta_1 - \theta_0)$$

Funkcja liniowa z fragmentami parabolicznymi: uwzględnienie punktów pośrednich – c.d.

Prędkość w chwili t_{p0} wynosi:

$$\dot{\theta}_p = \ddot{\theta}_0 \cdot t_{p0}$$

Musi ona być równa prędkości na odcinku liniowym:

$$\ddot{\theta}_0 \cdot t_{p0} = \frac{\theta_1 - \theta_p}{t_1 - t_{p0}}$$

A ponieważ: $\theta_p = \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}_0 \cdot t_{p0}^2}{2}$

$$\ddot{\theta}_0 \cdot t_{p0} \cdot (t_1 - t_{p0}) = \theta_1 - \theta_0 - \frac{\ddot{\theta}_0 \cdot t_{p0}^2}{2}$$

$$2 \cdot \ddot{\theta}_0 t_1 t_{p0} - 2 \cdot \ddot{\theta}_0 t_{p0}^2 = 2 \cdot \theta_1 - 2 \cdot \theta_0 - \ddot{\theta}_0 \cdot t_{p0}^2$$

$$\ddot{\theta}_0 \cdot t_{p0}^2 - 2 \cdot \ddot{\theta}_0 t_1 t_{p0} + 2 \cdot (\theta_1 - \theta_0) = 0$$

$$\Delta = 4 \cdot \ddot{\theta}_0^2 \cdot t_1^2 - 8 \cdot \ddot{\theta}_0 \cdot (\theta_1 - \theta_0)$$

Funkcja liniowa z fragmentami parabolicznymi: uwzględnienie punktów pośrednich – c.d.

Dalsze rozważania dotyczą przypadku $\theta_1 > \theta_0$ czyli $\ddot{\theta}_0 > 0$
(przypadek $\theta_1 < \theta_0$ proszę rozpatrzeć samodzielnie)

Aby istniało rozwiązanie, musi być $\Delta \geq 0$:

$$4 \cdot \ddot{\theta}_0^2 \cdot t_1^2 - 8 \cdot \ddot{\theta}_0 \cdot (\theta_1 - \theta_0) \geq 0$$

$$\ddot{\theta}_0 \cdot t_1^2 \geq 2 \cdot (\theta_1 - \theta_0)$$

$$\ddot{\theta}_0 \geq \frac{2 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{t_1^2}$$

Możliwe rozwiązania:

$$1)\ t_{p0} = \frac{2 \cdot \ddot{\theta}_0 t_1 + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \ddot{\theta}_0} \Downarrow t_{p0} = t_1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot \ddot{\theta}_0}$$

$$2)\ t_{p0} = \frac{2 \cdot \ddot{\theta}_0 t_1 - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \ddot{\theta}_0} \Downarrow t_{p0} = t_1 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot \ddot{\theta}_0}$$

Ponieważ musi być spełniony warunek:

$$t_{p0} + \frac{t_{p1}}{2} \leq t_1$$

Funkcja liniowa z fragmentami parabolicznymi: uwzględnienie punktów pośrednich – c.d.

więc dla wariantu 1:

$$t_1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot\ddot{\theta}_0} + \frac{t_{p1}}{2} \leqslant t_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{\ddot{\theta}_0} \leqslant -t_{p1} \Rightarrow \sqrt{\Delta} \leqslant -\ddot{\theta}_0 \cdot t_{p1}$$

$\Downarrow$

niemożliwe

Dla wariantu 2:

$$t_1 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot\ddot{\theta}_0} + \frac{t_{p1}}{2} \leqslant t_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{\ddot{\theta}_0} \geqslant t_{p1} \Rightarrow \sqrt{\Delta} \geqslant \ddot{\theta}_0 \cdot t_{p1}$$

Zatem:

$$\underbrace{t_{p0} = t_1 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot\ddot{\theta}_0}}_{} = t_1 - \sqrt{\frac{4\cdot\ddot{\theta}_0^2 t_1^2 - 8\cdot\ddot{\theta}_0\cdot(\theta_1-\theta_0)}{4\cdot\ddot{\theta}_0^2}} = \underbrace{t_1 - \sqrt{t_1^2 - \frac{2(\theta_1-\theta_0)}{\ddot{\theta}_0}}}$$

przy ograniczeniu:

$$\sqrt{4\cdot\ddot{\theta}_0^2\cdot t_1^2 - 8\cdot\ddot{\theta}_0\cdot(\theta_1-\theta_0)} \geqslant \ddot{\theta}_0\cdot t_{p1}$$

$\Downarrow$

$$4\cdot\ddot{\theta}_0^2\cdot t_1^2 - 8\cdot\ddot{\theta}_0\cdot(\theta_1-\theta_0) \geqslant \ddot{\theta}_0^2\cdot t_{p1}^2$$

Funkcja liniowa z fragmentami parabolicznymi: uwzględnienie punktów pośrednich – c.d.

$$(4 \cdot t_1^2 - t_{p1}^2) \cdot \ddot{\theta}_0^2 \geq 8 \cdot \ddot{\theta}_0 \cdot (\theta_1 - \theta_0)$$

$$(4 \cdot t_1^2 - t_{p1}^2) \cdot \ddot{\theta}_0 \geq 8 \cdot (\theta_1 - \theta_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\ddot{\theta}_0 \geq \frac{8 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{4 \cdot t_1^2 - t_{p1}^2}}$$

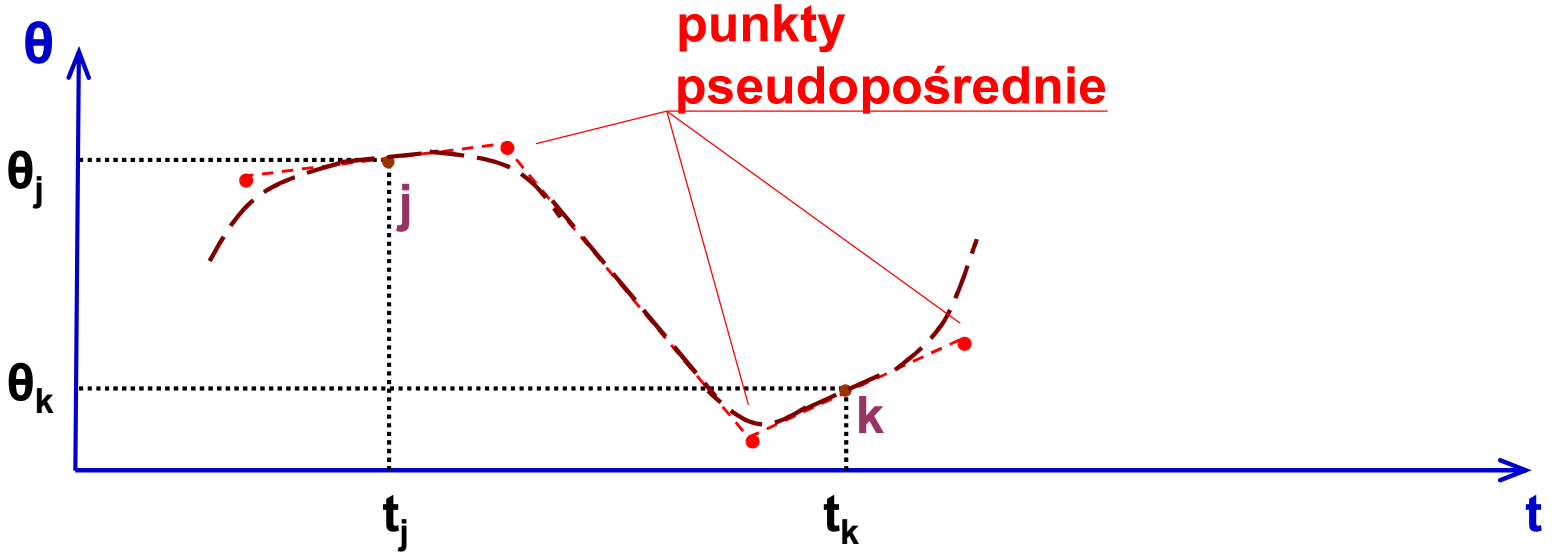
Należy zauważyć, że ograniczenie to jest ostrzejsze, niż podane wcześniej ograniczenie wynikające z warunku $\Delta \geq 0$:

$$\underline{\ddot{\theta}_0} \geq \frac{2 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{t_1^2} = \underline{\frac{8 \cdot (\theta_1 - \theta_0)}{4 \cdot t_1^2}}$$

Funkcja liniowa z fragmentami parabolicznymi: uwzględnienie punktów pośrednich – c.d.

Przy zastosowaniu omówionej metody, trajektoria nie przechodzi przez zadane punkty pośrednie, a tylko w ich pobliżu.

Aby uzyskać efekt dokładnego przechodzenia przez punkty pośrednie (czyli aby punkty pośrednie były tzw. punktami przejściowymi), można wykorzystać dodatkowe tzw. punkty pseudopośrednie:

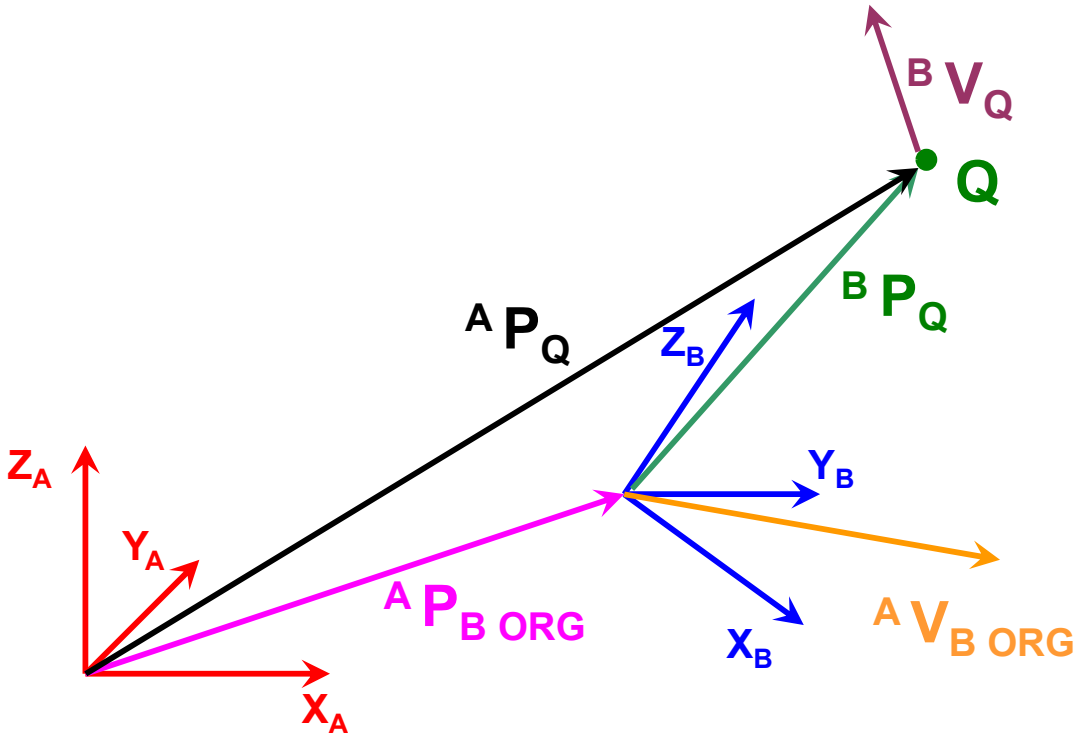


Opis trajektorii w języku programowania robota na przykładzie języka AL

- **Move ARM to C with duration = 3 seconds**
- **move ARM to C linearly with duration = 3 seconds**
- **move ARM to C via B**
- **move ARM to C via B, A, D**
- **…..**

Transformacja wektora prędkości

Wektor położenia a wektor prędkości:



$$\begin{bmatrix} {}^{A}P_{Q} \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^{A}_{B}R & & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} {}^{B}P_{Q} \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$$^{A}P_{Q} = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} + {}^{A}P_{BORG}$$

$$^{B}P_{Q} = \begin{bmatrix} {}^{B}x_{Q} \\ {}^{B}y_{Q} \\ {}^{B}z_{Q} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{B}V_{Q} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}{}^{B}x_{Q} \\ \frac{d}{dt}{}^{B}y_{Q} \\ \frac{d}{dt}{}^{B}z_{Q} \end{bmatrix}$$

Załóżmy (na razie) stałe położenie kątowe układu B względem układu A. Wtedy:

$$^{A}V_{Q} = \frac{d}{dt}{}^{A}P_{Q} = \frac{d}{dt}\left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} + {}^{A}P_{BORG}\right) = {}^{A}_{B}R \cdot \frac{d}{dt}{}^{B}P_{Q} + \frac{d}{dt}{}^{A}P_{BORG}$$

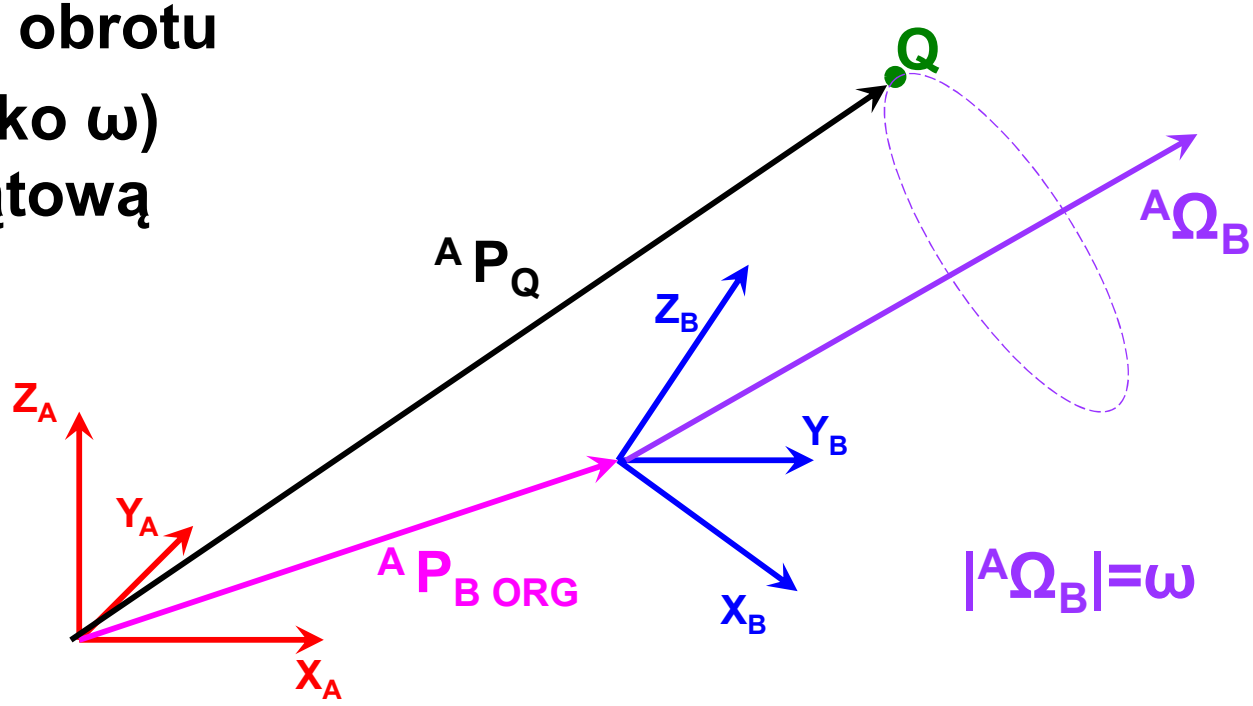
$$^{A}V_{Q} = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}V_{Q} + {}^{A}V_{BORG}$$

Transformacja wektora prędkości – c.d.

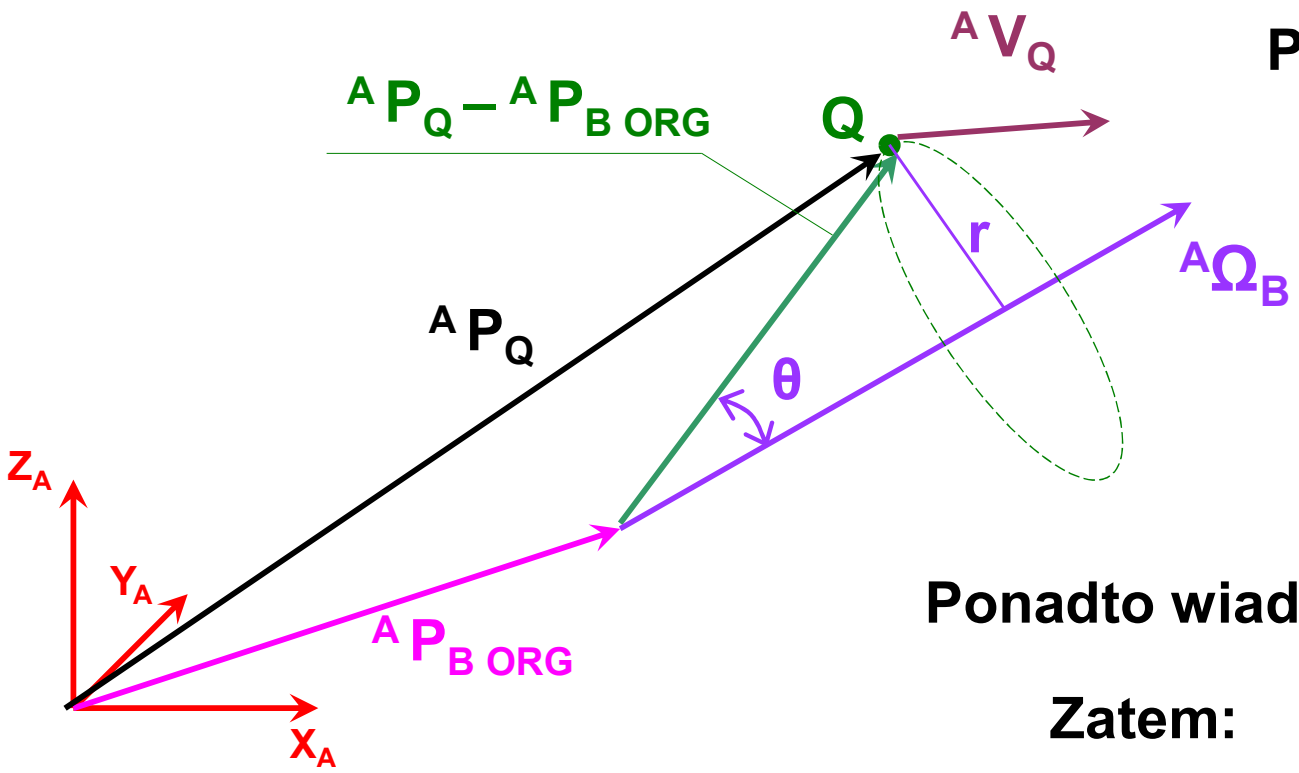
Teraz uwzględnimy obrót układu B w układzie współrzędnych A opisany za pomocą wektora prędkości obrotowej $^{A}\Omega_{B}$ (macierz obrotu jest więc zmienna w czasie). Na razie zakładamy $^{B}V_{Q}=0$ oraz $^{A}V_{B\ ORG}=0$ (rozważamy tylko prędkość punktu Q w układzie A, wynikającą z obrotu układu B)

Dla wektora prędkości obrotowej $^{A}\Omega_{B}$:

- **Kierunek determinuje oś obrotu**
- **Długość (oznaczmy ją jako ω) determinuje prędkość kątową**



Transformacja wektora prędkości – c.d.



Ponieważ: $^{A}P_{Q} = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} + {}^{A}P_{B\,ORG}$

więc: $^{A}P_{Q} - {}^{A}P_{B\,ORG} = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q}$

$$r = \left| {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} \right| \cdot \sin\theta$$

$$\left| {}^{A}V_{Q} \right| = \omega \cdot r = \left| {}^{A}\Omega_{B} \right| \cdot \left| {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} \right| \cdot \sin\theta$$

Ponadto wiadomo, że: $^{A}V_{Q} \perp {}^{A}\Omega_{B}$ i $^{A}V_{Q} \perp \left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} \right)$

Zatem: $$^{A}V_{Q} = {}^{A}\Omega_{B} \times \left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} \right)$$

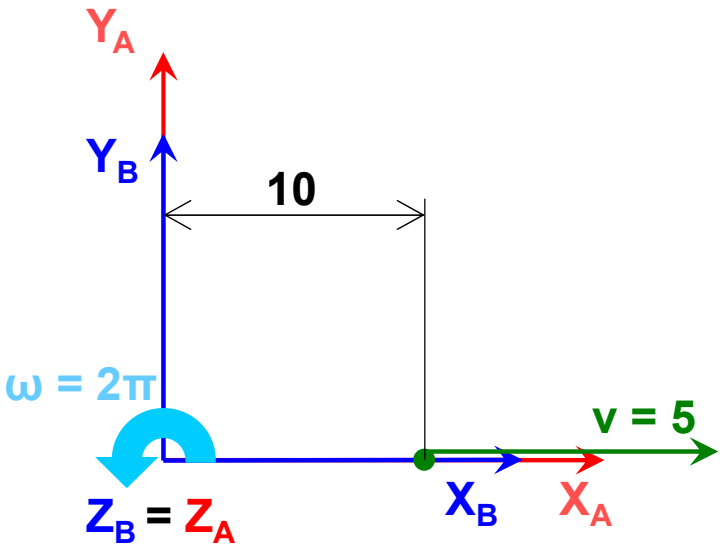
Wektor prędkości $^{A}V_{Q}$ jest przedstawiony w układzie współrzędnych A. Można go więc dodać bezpośrednio do obliczonego wcześniej wektora prędkości wynikającej z ruchu liniowego układu B względem układu A oraz z ruchu punktu Q względem układu B. Sumaryczna prędkość punktu Q jest więc:

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}\Omega_{B} \times \left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} \right) + {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}V_{Q} + {}^{A}V_{B\,ORG}$$

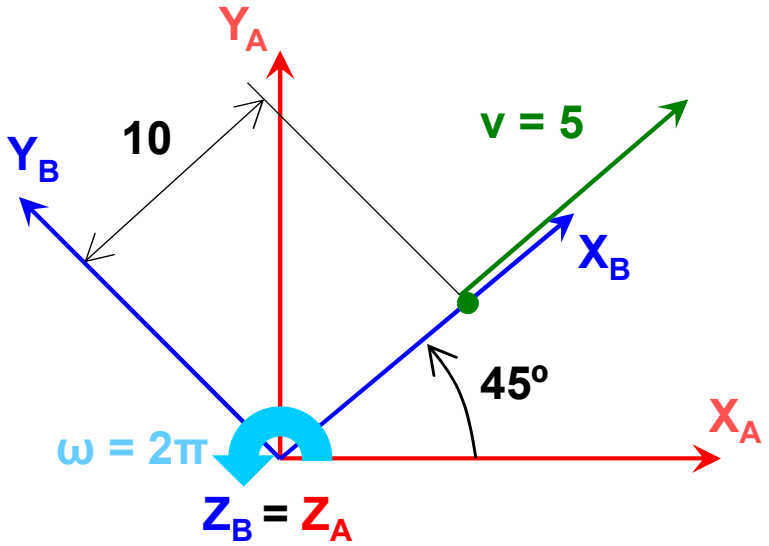
Transformacja wektora prędkości: przykład

Wierzchołek narzędzia przemieszcza się w układzie B kiści robota w kierunku osi X_B z prędkością 5mm/s. Chwilowe położenie tego wierzchołka w milimetrach w układzie kiści jest (10,0,0). Układ B, o początku wspólnym z układem współrzędnych stanowiska A, wykonuje wokół osi Z_A jeden obrót w ciągu sekundy (ω=2π rad/s). Określić wektor prędkości punktu wierzchołka w układzie stanowiska A dla przypadku, gdy oba układy mają jednakową orientację kątową oraz dla przypadku, gdy oś X_B tworzy z osią X_A kąt 45º

1)

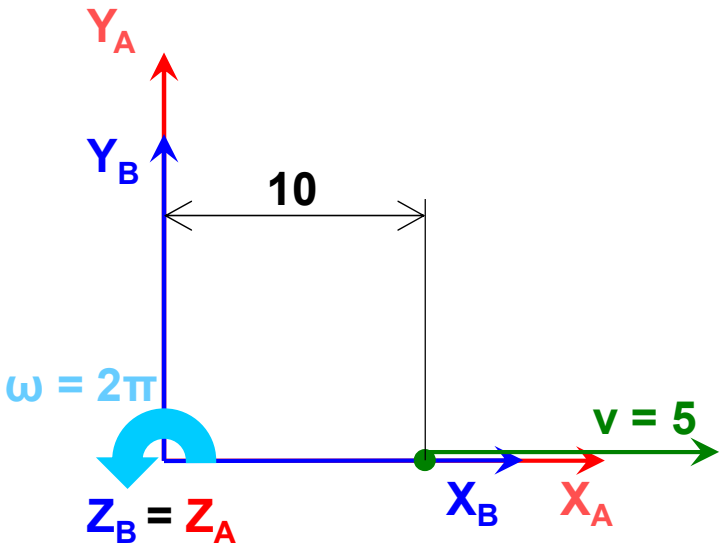


2)



Transformacja wektora prędkości: przykład – c.d.

1)

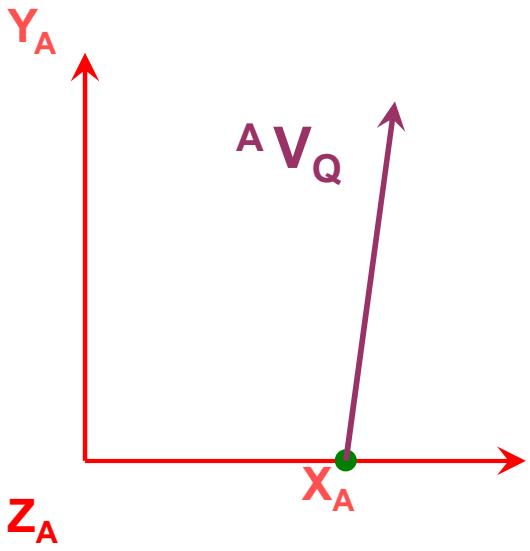


$$ {}^{A}V_{BORG} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{B}V_{Q} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}P_{Q} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{A}\Omega_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cdot\pi \end{bmatrix} $$

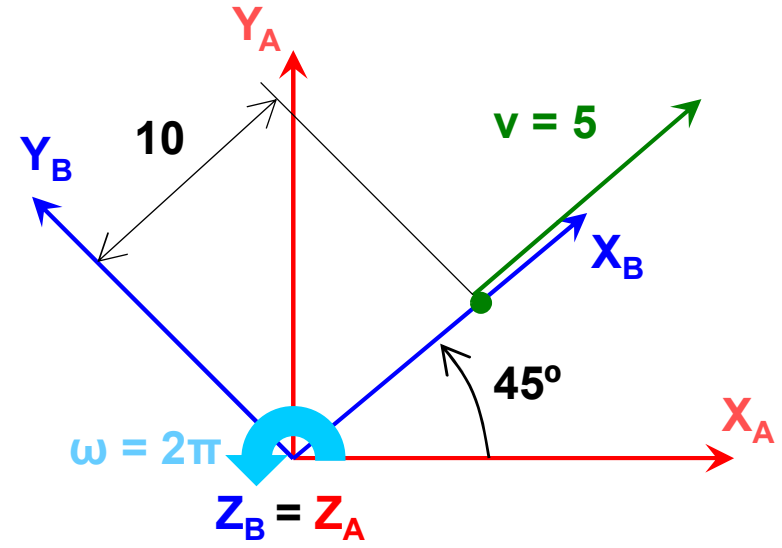
$$ {}^{A}V_{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cdot\pi \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}V_{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cdot\pi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20\cdot\pi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20\cdot\pi \\ 0 \end{bmatrix} $$



Transformacja wektora prędkości: przykład – c.d.

2)

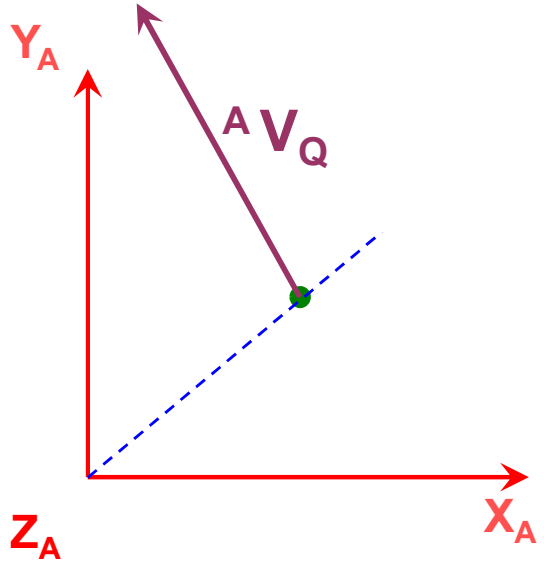


$$ {}^{A}V_{BORG} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{B}V_{Q} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

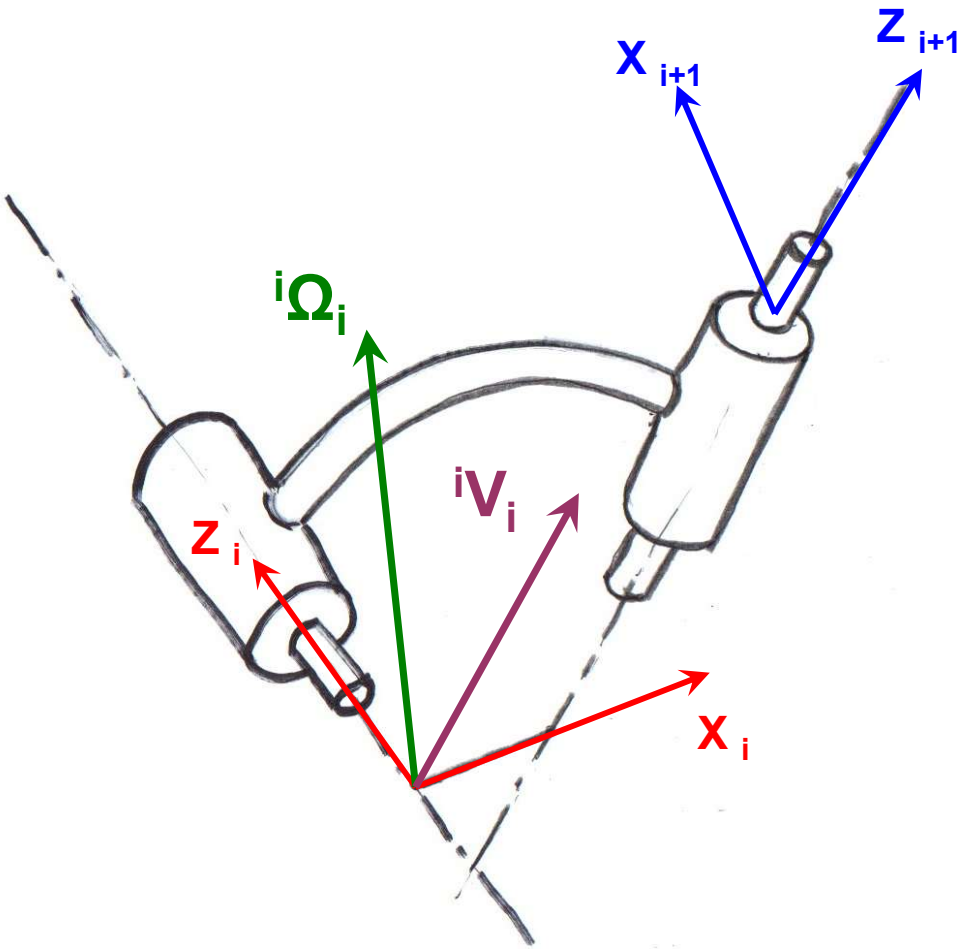
$$ {}^{B}P_{Q} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{A}\Omega_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cdot\pi \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}V_{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cdot\pi \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}V_{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cdot\pi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\pi\sqrt{2} \\ 10\pi\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 10\cdot\pi\cdot\sqrt{2} \\ 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 10\cdot\pi\cdot\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} $$



Przenoszenie prędkości przez człony kinematyczne



W wyniku przemieszczania się członów 1,2..,i robota, układ współrzędnych „i” jest w ruchu, który można rozbić na ruchy składowe: postępowy i obrotowy

$^{i}V_i$ – wektor opisujący ruch postępowy układu współrzędnych „i” w stosunku do nieruchomego otoczenia (np. do podstawy manipulatora)

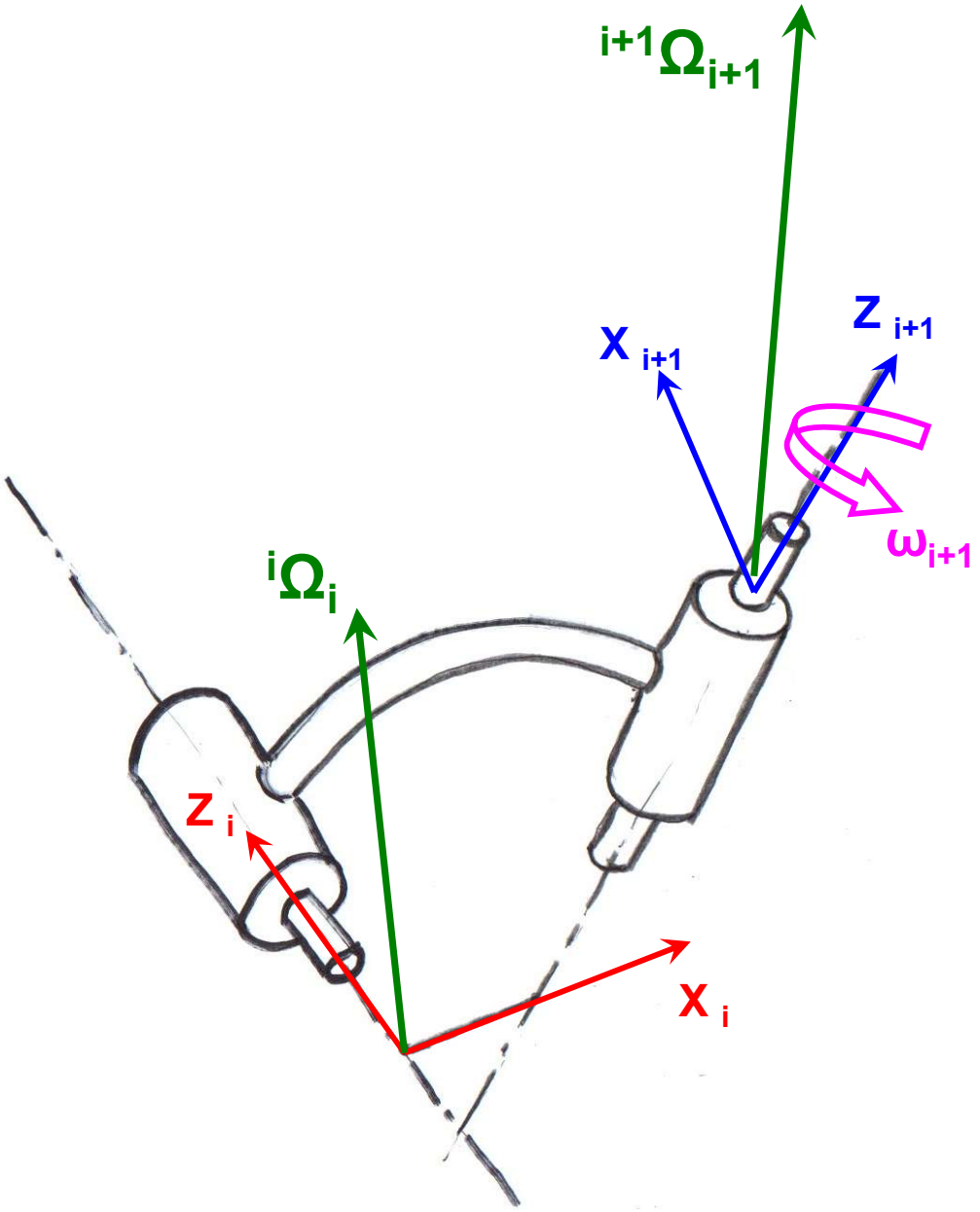
$^{i}\Omega_i$ – wektor opisujący obrót układu współrzędnych „i”

Kierunek wektora $^{i}\Omega_i$ określa oś obrotu, a jego długość prędkość kątową

Współrzędne wektorów $^{i}V_i$ i $^{i}\Omega_i$ podane są w układzie współrzędnych „i”

Opisują one chwilowe parametry tych ruchów

Obliczenie obrotu układu współrzędnych „i+1”



Jeśli przegub „i+1” jest przegubem obrotowym, to obrót ${}^{i+1}\Omega_{i+1}$ członu „i+1” wynika ze złożenia obrotu ${}^{i}\Omega_{i}$ oraz obrotu wokół osi Z_{i+1} z prędkością $\omega_{i+1} = \dot{\theta}_{i+1}$

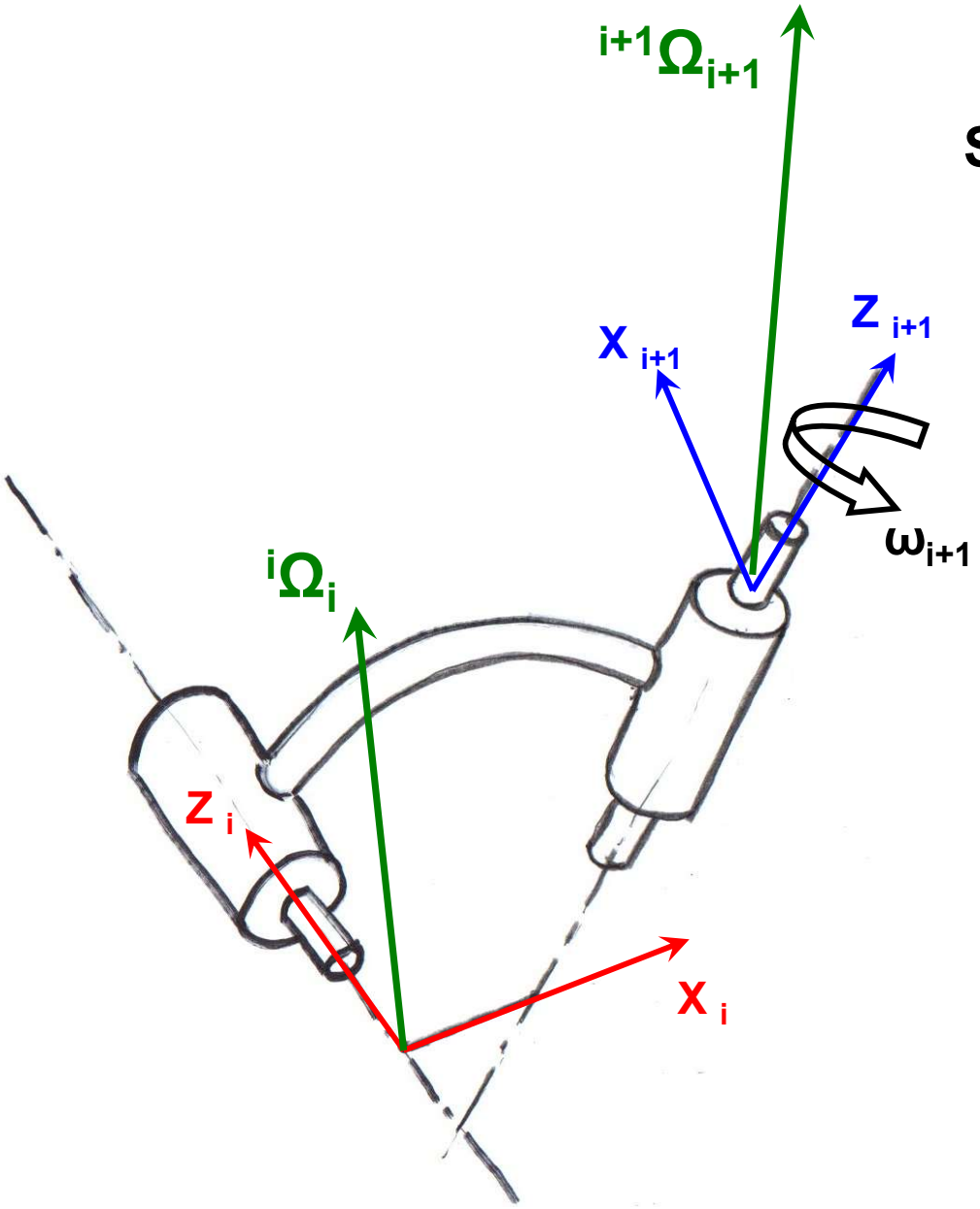
Aby dodać dwa wektory do siebie, muszą być one opisane w tym samym układzie współrzędnych. Dlatego zapisujemy obrót wokół osi Z_{i+1} w układzie współrzędnych „i”:

$$ {}^{i}\Omega_{i+1} = {}^{i}\Omega_{i} + \omega_{i+1} \cdot {}^{i}\hat{Z}_{i+1} $$

Przejście do układu „i+1”:

$$ {}^{i+1}\Omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\Omega_{i+1} $$

Obliczenie obrotu układu współrzędnych „i+1” – c.d.



Stąd:

$$^{i+1}\Omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\Omega_{i} + \omega_{i+1} \cdot {}^{i}\hat{Z}_{i+1} \right)$$

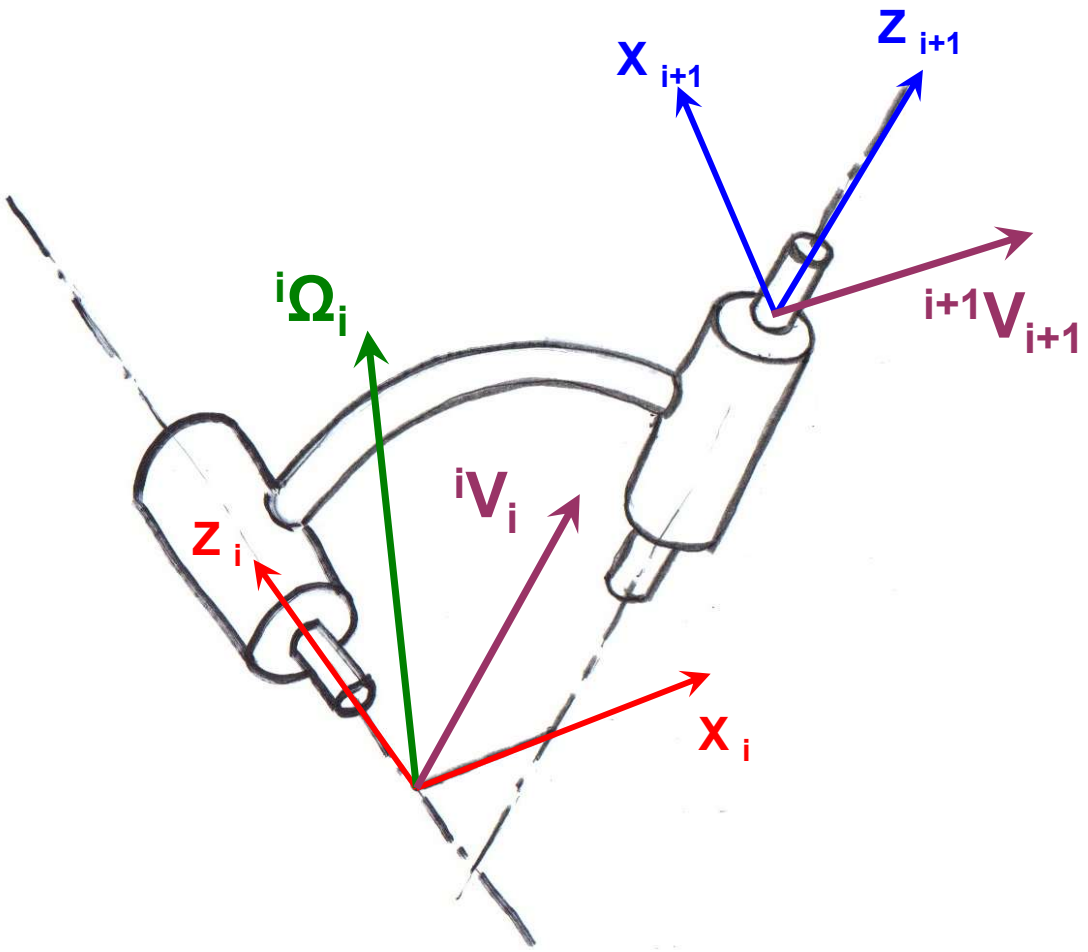
$$^{i+1}\Omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\Omega_{i} + \omega_{i+1} \cdot {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i+1}\Omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\Omega_{i} + \omega_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i+1}\Omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\Omega_{i} + \omega_{i+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{i+1}\Omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\Omega_{i} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix}$$

Obliczenie prędkości liniowej początku układu współrzędnych „i+1”

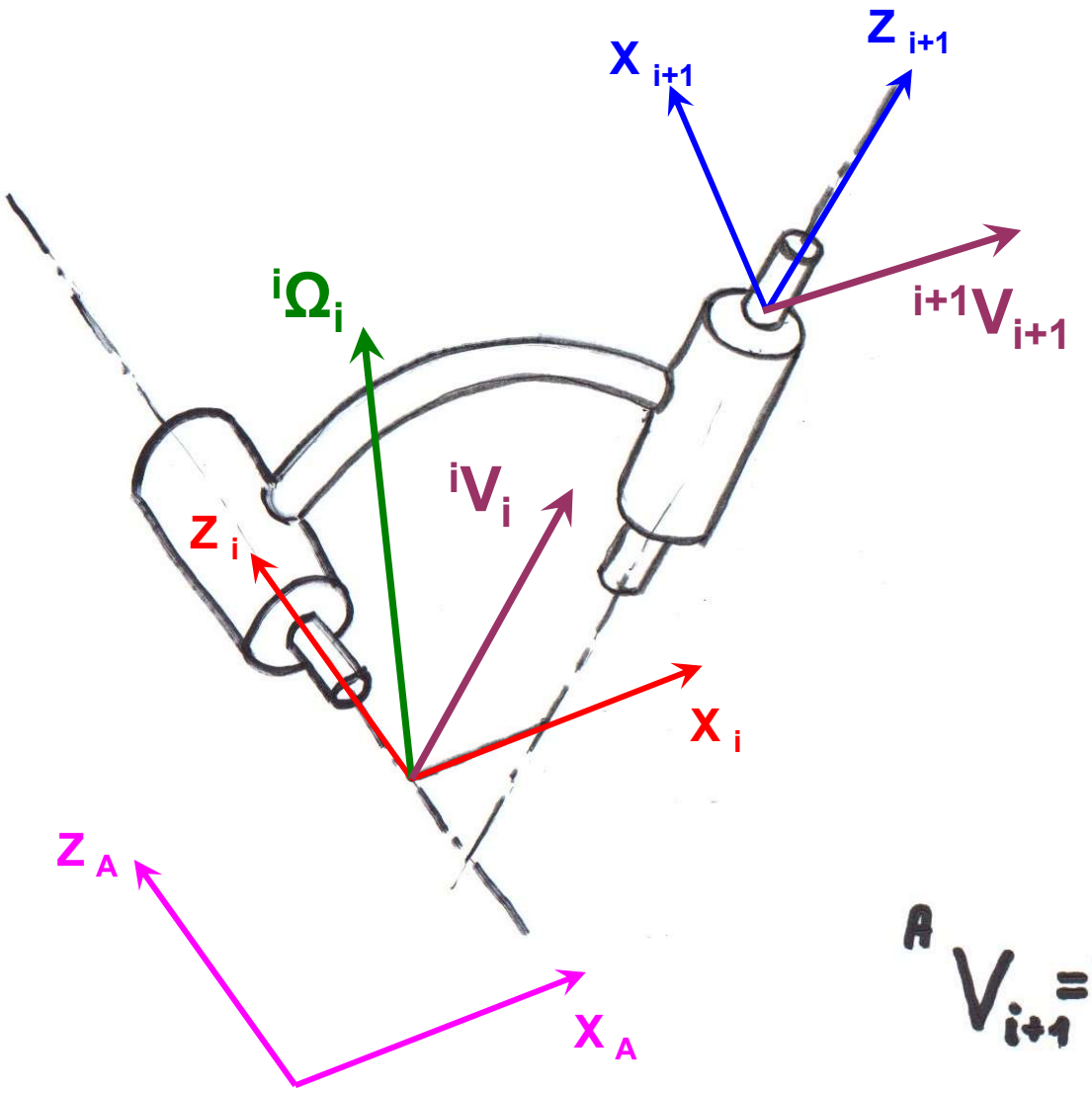


Celem naszym jest określenie, jakim wzorem przedstawia się prędkość liniowa początku układu współrzędnych „i+1” przy zadanej prędkości liniowej i prędkości kątowej układu „i”

Wykorzystujemy wyprowadzony poprzednio wzór na transformację wektora prędkości z układu współrzędnych A do układu współrzędnych B:

$$ {}^{A}V_{Q} = {}^{A}\Omega_{B} \times \left({}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P_{Q} \right) + {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}V_{Q} + {}^{A}V_{B\,ORG} $$

Obliczenie prędkości liniowej początku układu współrzędnych „i+1” – c.d.



Jako punkt **Q** interpretujemy początek układu współrzędnych „i+1”

Jako układ **B** interpretujemy układ współrzędnych „i”

Jako układ **A** interpretujemy nieruchomy względem podstawy manipulatora układ współrzędnych o orientacji kątowej zgodnej z układem współrzędnych „i”

$$ {}^{A}V_{i+1} = {}^{A}\Omega_{i} \times \left({}^{A}_{i}R \cdot {}^{i}P_{i+1} \right) + {}^{A}_{i}R \cdot \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i}\hat{Z}_{i+1} + {}^{A}V_{i} $$

Obliczenie prędkości liniowej początku układu współrzędnych „i+1” – c.d.

Ponieważ orientacja kątowa układu A oraz „i” jest taka sama, więc:

$$ {}^{A}V_i = {}^{i}V_i \qquad {}^{A}V_{i+1} = {}^{i}V_{i+1} \qquad {}^{A}\Omega_i = {}^{i}\Omega_i \qquad {}^{A}_{i}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Stąd:

$$ {}^{i}V_{i+1} = {}^{i}\Omega_i \times {}^{i}P_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i}V_i $$

$$ {}^{i+1}V_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}V_{i+1} $$

$$ {}^{i+1}V_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\Omega_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}V_i \right) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\hat{Z}_{i+1} $$

$$ {}^{i+1}V_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\Omega_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}V_i \right) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} $$

$$ {}^{i+1}V_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\Omega_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}V_i \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_{i+1} \end{bmatrix} $$

Gdy przegub „i+1” jest obrotowy: $\dot{d}_{i+1} = 0 \Rightarrow {}^{i+1}V_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\Omega_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}V_i \right)$

Obliczenie prędkości liniowej początku układu współrzędnych „i+1” – c.d.

Położenie liniowe ${}^{i}P_{i+1}$ początku układu współrzędnych „i+1” względem układu „i” określamy na podstawie wcześniej udowodnionej zależności:

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \cos\alpha_{i-1}\cdot\sin\theta_i & \cos\alpha_{i-1}\cdot\cos\theta_i & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i\cdot\sin\alpha_{i-1} \\ \sin\alpha_{i-1}\cdot\sin\theta_i & \sin\alpha_{i-1}\cdot\cos\theta_i & \cos\alpha_{i-1} & d_i\cdot\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i}P_{i+1} = \begin{bmatrix} a_i \\ -d_{i+1}\cdot\sin\alpha_i \\ d_{i+1}\cdot\cos\alpha_i \end{bmatrix} $$

Obliczenie prędkości liniowej początku układu współrzędnych „n” w układzie współrzędnych podstawy manipulatora

1) Dla i = 0, 1… n-1 obliczyć: ${}^{i}_{i+1}R$, ${}^{i+1}_{i}R$ oraz: ${}^{i}P_{i+1}$

2) Przyjąć: ${}^{0}\Omega_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ${}^{0}V_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

3) Dla i = 0, 1… n-2 obliczyć: ${}^{i+1}\Omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\Omega_i + \begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_{i+1}\end{bmatrix}$

4) Dla i = 0, 1… n-1 obliczyć: ${}^{i+1}V_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\Omega_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}V_i\right) + \begin{bmatrix}0\\0\\\dot{d}_{i+1}\end{bmatrix}$

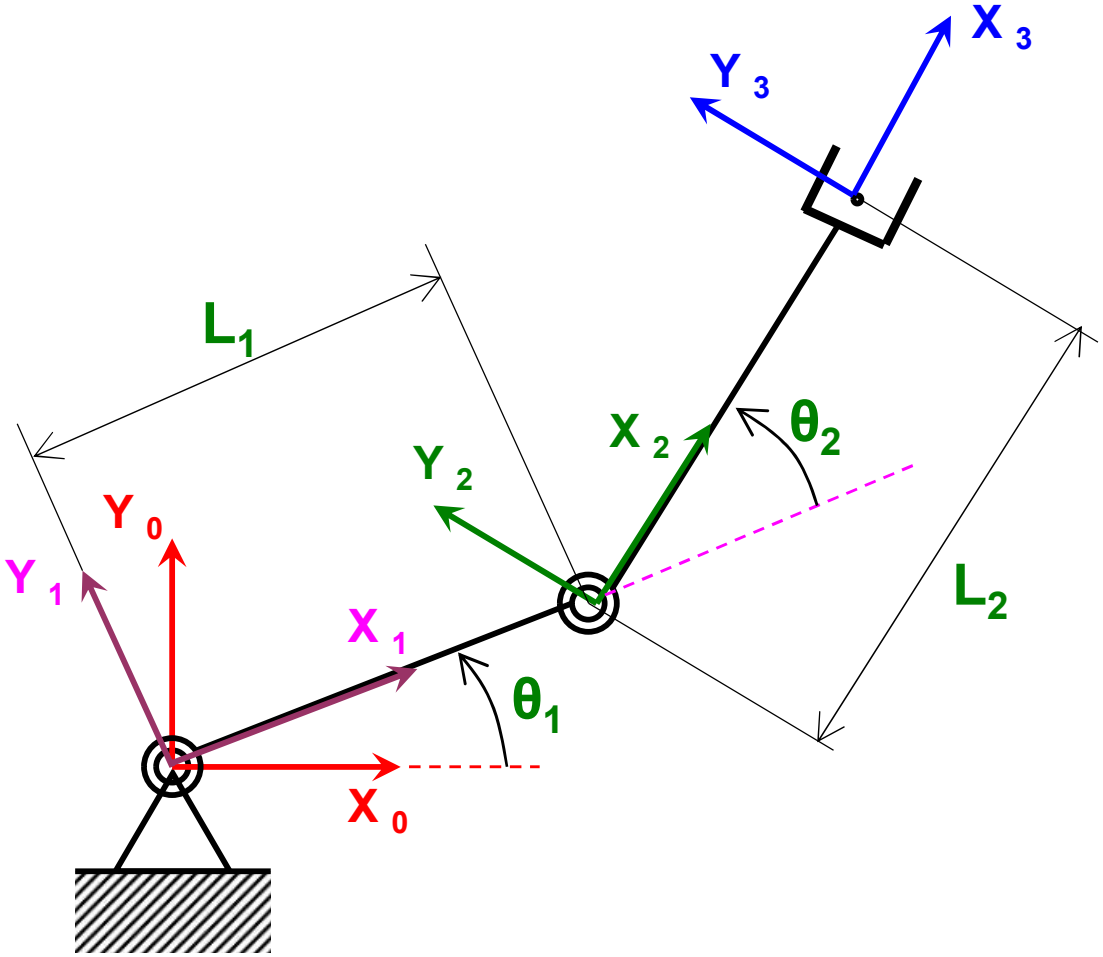
5) Obliczyć orientację kątową układu „n” względem podstawy:

$${}^{0}_{n}R = {}^{0}_{1}R \cdot {}^{1}_{2}R \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}_{n}R$$

6) Ostatecznie szukana prędkość liniowa wynosi: ${}^{0}V_n = {}^{0}_{n}R \cdot {}^{n}V_n$

Przykład obliczenia prędkości liniowej chwytaka (dla manipulatora dwuczłonowego)

Manipulator 2-członowy:



Parametry Denavita-Hartenberga:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0º	0	0	θ_1
2	0º	L_1	0	θ_2
3	0º	L_2	0	0

$$ {}^0P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1P_2 = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2P_3 = \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Przykład obliczenia prędkości liniowej chwytaka manipulatora – c.d.

$$ {}^0_1R = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2R = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1_0R = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_1R = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0\Omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1\Omega_1 = {}^1_0R \cdot {}^0\Omega_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2\Omega_2 = {}^2_1R \cdot {}^1\Omega_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 + \dot\theta_2 \end{bmatrix} $$

Przykład obliczenia prędkości liniowej chwytaka manipulatora – c.d.

$$
{}^{1}V_1 = {}^{1}_{0}R \cdot \left({}^{0}\Omega_0 \times {}^{0}P_1 + {}^{0}V_0\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}V_2 = {}^{2}_{1}R \cdot \left({}^{1}\Omega_1 \times {}^{1}P_2 + {}^{1}V_1\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}V_3 = {}^{3}_{2}R \cdot \left({}^{2}\Omega_2 \times {}^{2}P_3 + {}^{2}V_2\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot L_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot L_2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Przykład obliczenia prędkości liniowej chwytaka manipulatora – c.d.

$$
{}^{0}_{3}R = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 & 0 \\ +\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

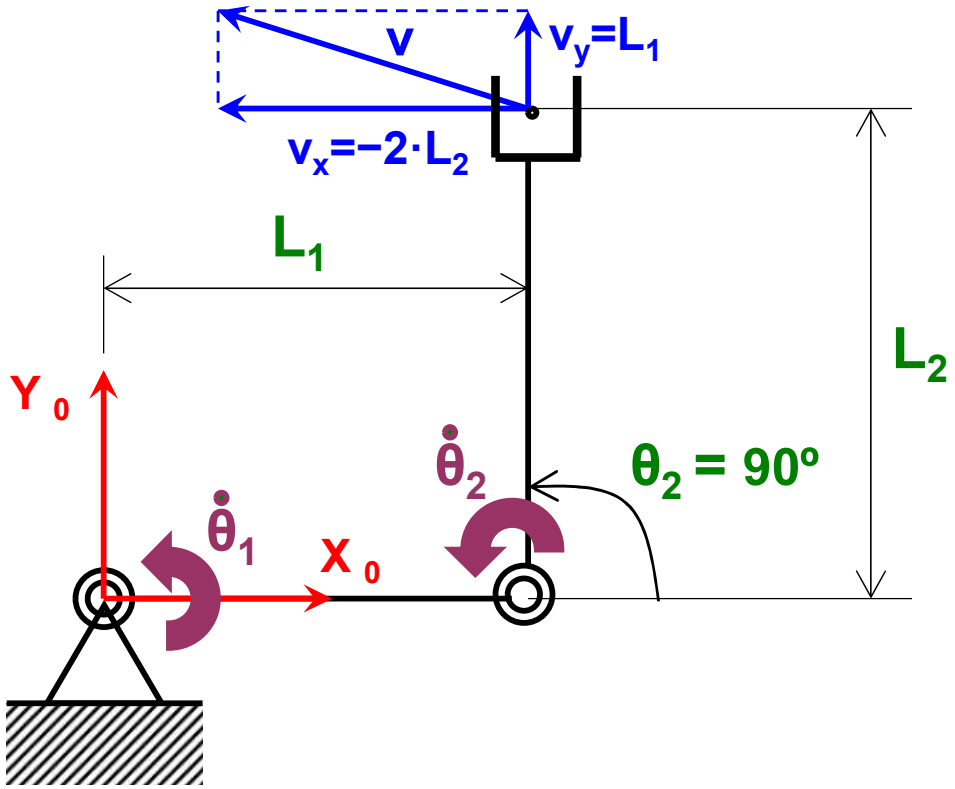
$$
{}^{0}V_3 = {}^{0}_{3}R \cdot {}^{3}V_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot\theta_1\cdot L_1\cdot\sin\theta_2 \\ \dot\theta_1\cdot L_1\cdot\cos\theta_2 + (\dot\theta_1+\dot\theta_2)\cdot L_2 \\ 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dot\theta_1\cdot L_1\cdot(\sin\theta_2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) - \cos\theta_2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)) - (\dot\theta_1+\dot\theta_2)\cdot L_2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \dot\theta_1\cdot L_1\cdot(\sin\theta_2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) + \cos\theta_2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)) + (\dot\theta_1+\dot\theta_2)\cdot L_2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dot\theta_1\cdot L_1\cdot\sin(\theta_2-\theta_1-\theta_2) - (\dot\theta_1+\dot\theta_2)\cdot L_2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \dot\theta_1\cdot L_1\cdot\cos(\theta_2-\theta_1-\theta_2) + (\dot\theta_1+\dot\theta_2)\cdot L_2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot\theta_1\cdot L_1\cdot\sin\theta_1 - (\dot\theta_1+\dot\theta_2)\cdot L_2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \dot\theta_1\cdot L_1\cdot\cos\theta_1 + (\dot\theta_1+\dot\theta_2)\cdot L_2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Przykład obliczenia prędkości liniowej chwytaka manipulatora – c.d.

Przykładowo dla: $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 1 \frac{rad}{s}$ $\theta_1 = 0°$ $\theta_2 = 90°$



$$ {}^0V_3 = \begin{bmatrix} -1 \cdot L_1 \cdot \sin 0° - (1+1) \cdot L_2 \cdot \sin(0°+90°) \\ 1 \cdot L_1 \cdot \cos 0° + (1+1) \cdot L_2 \cdot \cos(0°+90°) \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0V_3 = \begin{bmatrix} -2 \cdot L_2 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Macierze Jacobiego (jakobiany) w robotyce

Jeśli dana jest funkcja odwzorowująca wektor X na wektor Y:

$$Y = F(X)$$

czyli:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3 \ldots)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3 \ldots)$$
$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3 \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

to macierz Jacobiego jest:

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \ldots \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \ldots \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Uwaga: w robotyce używa się terminu „jakobian” jako synonimu macierzy Jacobiego (w matematyce „jakobian” oznacza wyznacznik tej macierzy)

Jakobiany w robotyce – c.d.

Wiadomo, że:

$$\begin{cases} dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots \\ dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

zatem:

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

czyli:

$$dY = \frac{\partial F(X)}{\partial X} \cdot dX = J(X) \cdot dX$$

Różniczkując po czasie otrzymujemy: $\frac{dY}{dt} = J(X) \cdot \frac{dX}{dt} \Rightarrow \dot{Y} = J(X) \cdot \dot{X}$

Jakobiany w robotyce – c.d.

Przy opisie manipulatorów: $X \rightarrow$ wektor zmiennych konfiguracyjnych θ

$Y \rightarrow$ wektor współrzędnych kartezjańskich

zatem:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ \dots \end{bmatrix} = J(\theta) \cdot d\theta$$

oraz:

$$\begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} = J(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

gdzie: $V \rightarrow$ wektor prędkości liniowej członu roboczego

$\Omega \rightarrow$ wektor prędkości kątowej członu roboczego

Liczba kolumn jakobianu – liczba połączeń ruchowych

Liczba wierszy jakobianu – liczba stopni swobody w rozważanej przestrzeni kartezjańskiej

Jeśli jakobian służy tylko do obliczania prędkości liniowej członu roboczego, to wystarczy, że będzie miał 3 wiersze (a dla zagadnień płaskich – 2 wiersze):

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \dots \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \dots \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \dots \end{bmatrix}$$

Jakobiany w robotyce – c.d.

Jakobiany możemy wyznaczyć w różnych układach współrzędnych (najczęściej w układzie podstawy robota lub w układzie jego kiści). W zależności od tego, w jakim układzie współrzędnych chcemy określić wektor prędkości, wyznaczamy jakobian w tym właśnie układzie współrzędnych, odpowiednio go oznaczając np.:

- jakobian w układzie współrzędnych podstawy: $^{0}J(\theta)$

- jakobian w układzie współrzędnych kiści robota o n przegubach: $^{n}J(\theta)$

Wzór na prędkość kiści może mieć więc odpowiednio postać:

$$^{0}V_{n} = {}^{0}J(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

lub:

$$^{n}V_{n} = {}^{n}J(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

Obliczenie jakobianu na podstawie wektora prędkości liniowej (przykład)

Zauważmy, że możliwe jest też działanie odwrotne tj. wyznaczenie jakobianu przy znajomości prędkości członu roboczego (kiści):

Mając dany wektor $^0V_n = F(\dot{\theta})$ oraz znając zależność $^0V_n = {}^0J(\theta) \cdot \dot{\theta}$, można dobrać wyrażenia opisujące poszczególne elementy jakobianu. Przykładowo dla manipulatora dwuczłonowego:

$$^0V_3 = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_1 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^0V_3 = {}^0J(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

Jakobian musi mieć 3 wiersze i 2 kolumny:

$$^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obliczenie jakobianu na podstawie wektora prędkości liniowej (przykład) – c.d.

Analogiczne obliczenia można przeprowadzić w układzie kiści. Dla manipulatora dwuczłonowego był wyznaczony wektor prędkości:

$$ {}^{3}V_3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot L_2 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Ponieważ: $ {}^{3}V_3 = {}^{3}J_g(\theta) \cdot \dot{\theta} $

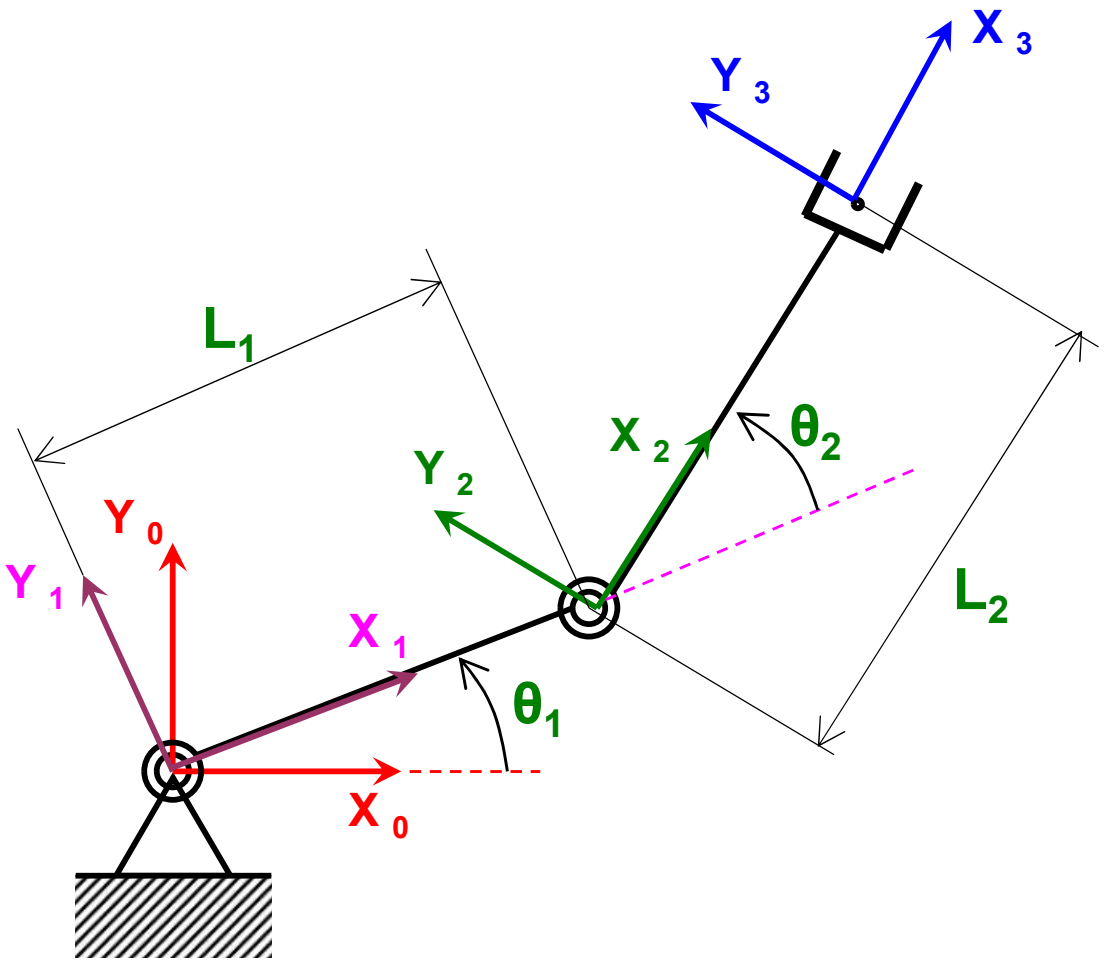
więc:

$$ \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot L_2 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^{3}J_g(\theta) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$

Zatem jakobian będzie miał 3 wiersze i 2 kolumny:

$$ {}^{3}J_g(\theta) = \begin{bmatrix} L_1 \cdot \sin\theta_2 & 0 \\ L_1 \cdot \cos\theta_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Przykład wyznaczania jakobianu na podstawie definicji (jakobian analityczny)



Najpierw należy określić funkcje:

$x = f_x(\theta_1, \theta_2)$

$y = f_y(\theta_1, \theta_2)$

(załóżmy, że w układzie współrzędnych podstawy)

Do tego potrzebne jest określenie transformacji przejścia z układu 0 do układu 3:

$${}^0_1T = RotZ(\theta_1)$$

$${}^1_2T = TranX(L_1)\cdot RotZ(\theta_2)$$

$${}^2_3T = TranX(L_2)$$

$${}^0_3T = RotZ(\theta_1)\cdot TranX(L_1)\cdot RotZ(\theta_2)\cdot TranX(L_2)$$

Przykład wyznaczania jakobianu analitycznego – c.d.

$$RotZ(\theta_1)\cdot TranX(L_1)=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & L_1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & L_1\cdot\cos\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & L_1\cdot\sin\theta_1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$RotZ(\theta_1)\cdot TranX(L_1)\cdot RotZ(\theta_2)=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & L_1\cos\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & L_1\sin\theta_1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2 & 0 & L_1\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2 & 0 & L_1\sin\theta_1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\cos\theta_1\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\sin\theta_1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Przykład wyznaczania jakobianu analitycznego – c.d.

$$
{}^{0}_{3}T = RotZ(\theta_1)\cdot TranX(L_1)\cdot RotZ(\theta_2)\cdot TranX(L_2) =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\cos\theta_1 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Przykład wyznaczania jakobianu analitycznego – c.d.

$$\begin{bmatrix} {}^0P_{TCP} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0_3T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

stąd:

$$\begin{cases} x = L_1 \cdot \cos\theta_1 + L_2 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = L_1 \cdot \sin\theta_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_1+\theta_2) \\ z = 0 \end{cases}$$

zatem jakobian (w układzie „0”):

$${}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta_1} & \frac{\partial x}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta_1} & \frac{\partial y}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta_1} & \frac{\partial z}{\partial\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1\sin\theta_1 - L_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) & L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład wyznaczania jakobianu analitycznego – c.d.

Wynika stąd, że:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & L_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$V_x = -\dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_1 - (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$V_y = \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_1 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2)$$
$$V_z = 0$$

Wzory te są zgodne z wyznaczonym wcześniej wektorem prędkości $^0V_3$:

$$^0V_3 = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \sin\theta_1 - (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_1+\theta_2) \\ \dot{\theta}_1 \cdot L_1 \cdot \cos\theta_1 + (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie jakobianu geometrycznego

Dla konkretnej konfiguracji robota (dla określonych wartości zmiennych konfiguracyjnych), można obliczyć jakobian geometryczny na podstawie:

- **aktualnych wersorów $\mathbf{a}_i$ poszczególnych osi przegubów**

zaś w przypadku przegubów rotacyjnych dodatkowo na podstawie:

- **wektora położenia efektora $\mathbf{e}$ (punktu TCP)**
- **wektorów położenia dowolnych punktów $\mathbf{p}_i$ leżących na poszczególnych osiach tych przegubów (zazwyczaj bierzemy pod uwagę punkty $\mathbf{p}_i$ będące początkami układów współrzędnych poszczególnych członów):**

Wyznaczanie jakobianu geometrycznego – c.d.

Jakobian przedstawia się wzorem:

$$J = \begin{bmatrix} w_{1X} & w_{2X} & w_{3X} & \cdots & w_{nX} \\ w_{1Y} & w_{2Y} & w_{3Y} & \cdots & w_{nY} \\ w_{1Z} & w_{2Z} & w_{3Z} & \cdots & w_{nZ} \end{bmatrix}$$

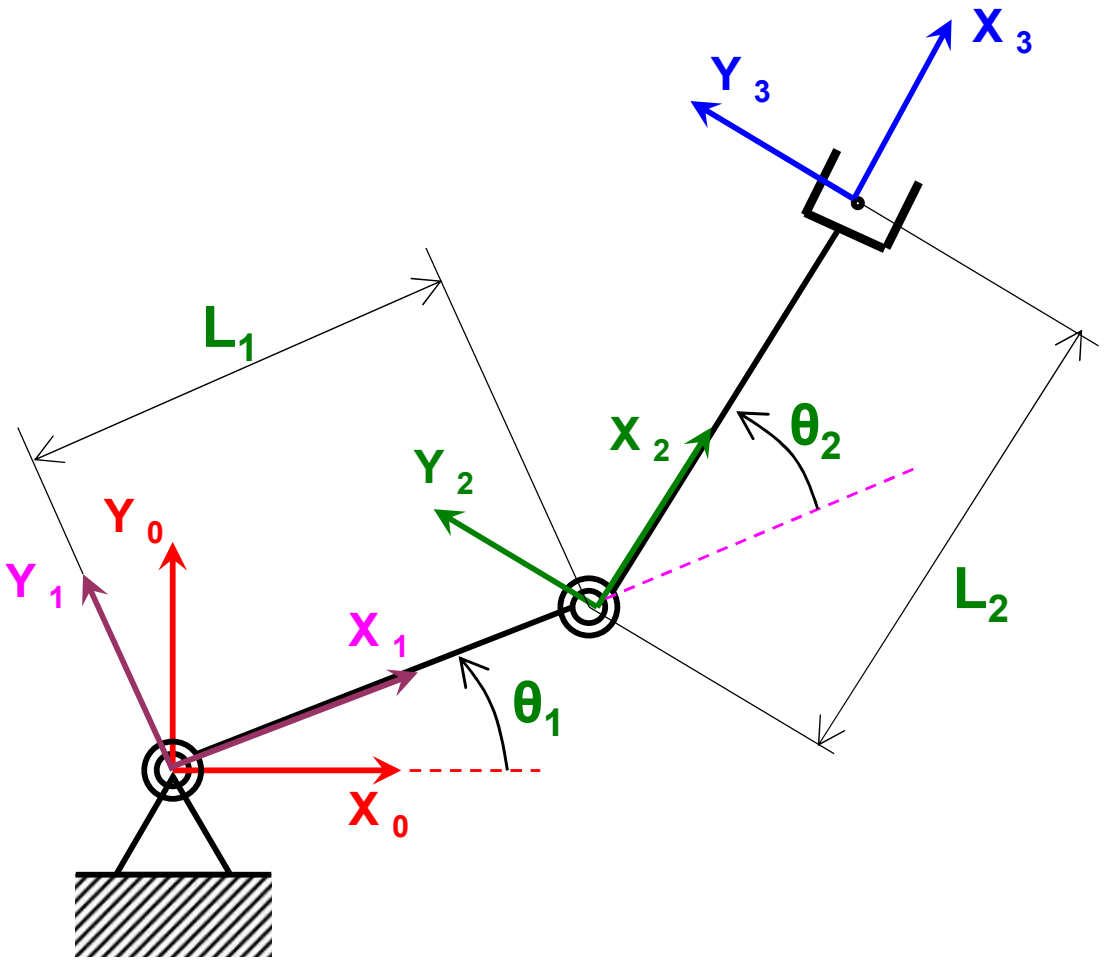
gdzie: w_{ix} , w_{iY} , w_{iZ} – **rzuty wektora $\mathbf{w_i}$ na osie X,Y,Z układu współrzędnych, w którym chcemy obliczyć jakobian**

przy czym:

$\mathbf{w_i = a_i}$ – **dla przegubów translacyjnych**

$\mathbf{w_i = a_i \times (e - p_i)}$ – **dla przegubów rotacyjnych**

Przykład wyznaczania jakobianu geometrycznego



Obliczmy jakobian w układzie 0:

$$e = \begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos\theta_1 + L_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cdot \sin\theta_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad p_2 = \begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos\theta_1 \\ L_1 \cdot \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład wyznaczania jakobianu geometrycznego – c.d.

Stąd:

$$w_1 = a_1 \times (e - p_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \cdot \cos\theta_1 + L_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cdot \sin\theta_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -L_1 \cdot \sin\theta_1 - L_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cdot \cos\theta_1 + L_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = a_2 \times (e - p_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie:

$${}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie jakobianu – rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki dla prędkości

Skoro: $V = J(\theta) \cdot \dot{\theta}$

więc: $\dot{\theta} = J^{-1}(\theta) \cdot V$

Rozwiązanie w ten sposób odwrotnego zadania kinematyki dla prędkości jest możliwe, jeśli można wyznaczyć macierz odwrotną do jakobianu $J^{-1}(\theta)$

Macierz odwrotna

Niech będzie dana macierz A.

Macierz odwrotna spełnia warunek: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

gdzie I – macierz jednostkowa

Macierz odwrotna – c.d.

Macierz odwrotną wyznaczamy ze wzoru: $A^{-1} = A_{ad} / \det(A)$

gdzie A_{ad} – macierz dołączona

Zastosowanie wzoru wymaga spełnienia warunku $\det(A) \neq 0$, a zatem :

- Rząd macierzy A jest równy wymiarowi tej macierzy.
- Macierz A jest nieosobliwa.

Obliczenie macierzy dołączonej:

- Obliczamy macierz transponowaną A^T
- Każdy element A^T zastępujemy przez dopełnienie algebraiczne:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

gdzie M_{ij} – minor stopnia $n-1$ (wyznacznik macierzy powstałej przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny)

Przykład macierzy odwrotnej

Dana jest macierz A^{2x2}:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_{ad}=\begin{bmatrix} 1\cdot a_{22} & -1\cdot a_{12} \\ -1\cdot a_{21} & 1\cdot a_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

stąd:

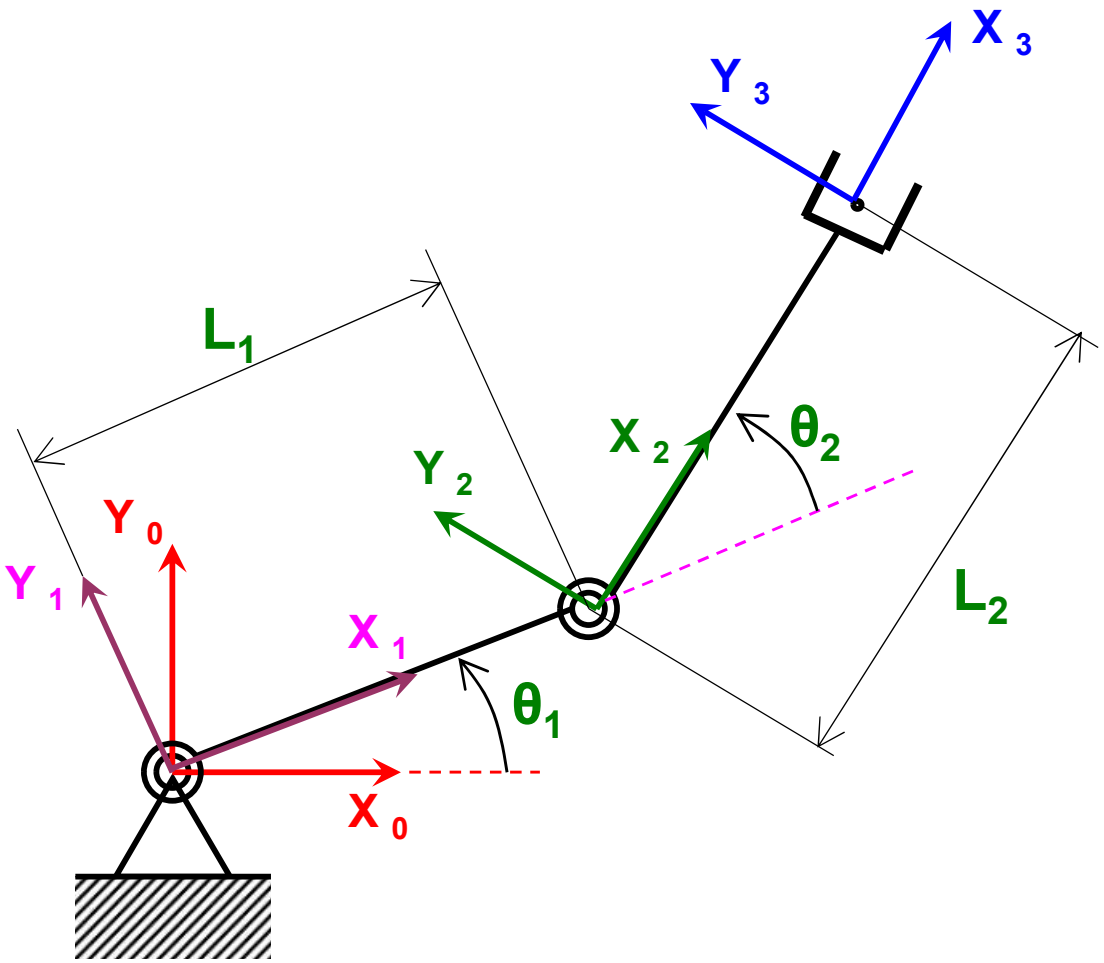
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & \frac{-a_{12}}{\det A} \\ \frac{-a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Przykład rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla prędkości

Niech będzie dany manipulator dwuczłonowy:



Jakobiany uwzględniające tylko składowe v_x i v_y prędkości (składowa v_z=0):

$$ {}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} -L_1\sin\theta_1 - L_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) & L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} $$

$$ {}^3J(\theta) = \begin{bmatrix} L_1\sin\theta_2 & 0 \\ L_1\cos\theta_2 + L_2 & L_2 \end{bmatrix} $$

Przykład rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla prędkości – c.d.

Wyznacznik jakobianu $^0J(\theta)$ jest:

$$\det\left({}^0_4J\right) = -L_1L_2\sin\theta_1\cos(\theta_1+\theta_2) - L_2^2\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2) +$$
$$+L_1L_2\cos\theta_1\sin(\theta_1+\theta_2) + L_2^2\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2) =$$
$$= L_1L_2\left(\cos\theta_1\sin(\theta_1+\theta_2) - \sin\theta_1\cos(\theta_1+\theta_2)\right) =$$
$$= L_1L_2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_1) = L_1L_2\sin\theta_2$$

zatem macierz odwrotna jest:

$${}^0_4J^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{L_1\sin\theta_2} & \dfrac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{L_1\sin\theta_2} \\ -\dfrac{\cos\theta_1}{L_2\sin\theta_2} - \dfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{L_1\sin\theta_2} & -\dfrac{\sin\theta_1}{L_2\sin\theta_2} - \dfrac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{L_1\sin\theta_2} \end{bmatrix}$$

Przykład rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla prędkości – c.d.

Wyznacznik jakobianu $^3J(\theta)$ jest:

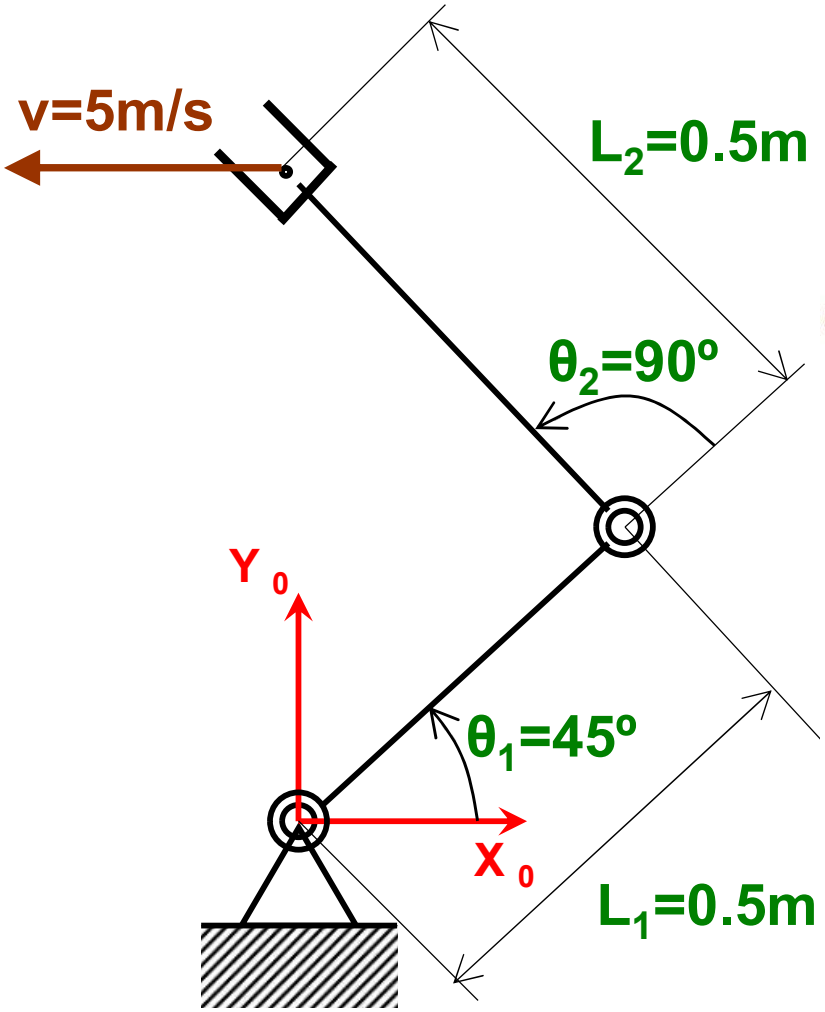
$$\det\left({}^3J\right) = L_1 L_2 \sin\theta_2$$

zatem macierz odwrotna jest:

$${}^3J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{L_1 L_2 \sin\theta_2} & 0 \\ -\frac{L_1\cos\theta_2 + L_2}{L_1 L_2 \sin\theta_2} & \frac{L_1 \sin\theta_2}{L_1 L_2 \sin\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 \sin\theta_2} & 0 \\ -\frac{\cos\theta_2}{L_2 \sin\theta_2} - \frac{1}{L_1 \sin\theta_2} & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}$$

Przykład rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla prędkości – c.d.

Rozwiązanie dla przypadku $\theta_1=45^o$ $\theta_2=90^o$ $v_x=-5m/s$ $L_1=0.5m$ $L_2=0.5m$



$${}^0V_3=\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix} \qquad \dot\theta_1=? \qquad \dot\theta_2=?$$

$${}^0J^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\cos(45^\circ+90^\circ)}{0{,}5\cdot\sin 90^\circ} & \frac{\sin(45^\circ+90^\circ)}{0{,}5\cdot\sin 90^\circ}\\ -\frac{\cos 45^\circ}{0{,}5\cdot\sin 90^\circ}-\frac{\cos(45^\circ+90^\circ)}{0{,}5\cdot\sin 90^\circ} & -\frac{\sin 45^\circ}{0{,}5\cdot\sin 90^\circ}-\frac{\sin(45^\circ+90^\circ)}{0{,}5\cdot\sin 90^\circ}\end{bmatrix}=$$

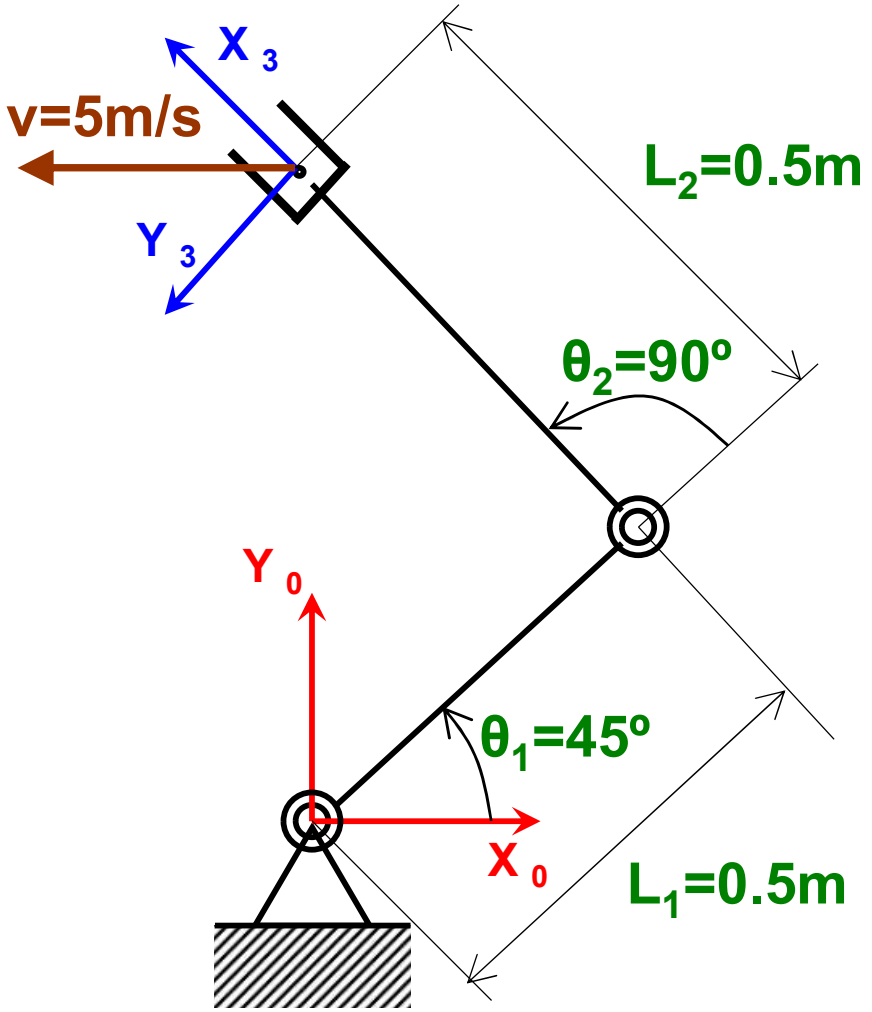
$$=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2}+\sqrt{2} & -\sqrt{2}-\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & -2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & -2\sqrt{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$$

$$\dot\theta_1=5\sqrt{2}\ rad/s \qquad \dot\theta_2=0\ rad/s$$

Przykład rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla prędkości – c.d.

Dla tego samego przypadku wykorzystamy $^{3}J^{-1}$:



$$^{3}V_3 = \begin{bmatrix} 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \dot{\theta}_1 = ? \qquad \dot{\theta}_2 = ?$$

$$^{3}J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0{,}5\cdot\sin 90^\circ} & 0 \\ -\frac{\cos 90^\circ}{0{,}5\cdot\sin 90^\circ} & \frac{1}{0{,}5} \end{bmatrix} - \frac{1}{0{,}5\sin 90^\circ} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot\sqrt{2} \\ -5\cdot\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta}_1 = 5\sqrt{2}\ \text{rad/s} \qquad \dot{\theta}_2 = 0\ \text{rad/s}$$

Osobliwości

W niektórych obszarach swojej przestrzeni roboczej manipulator może mieć tzw. osobliwości:

$$\det(J(\theta)) = 0$$

Wyróżniamy:

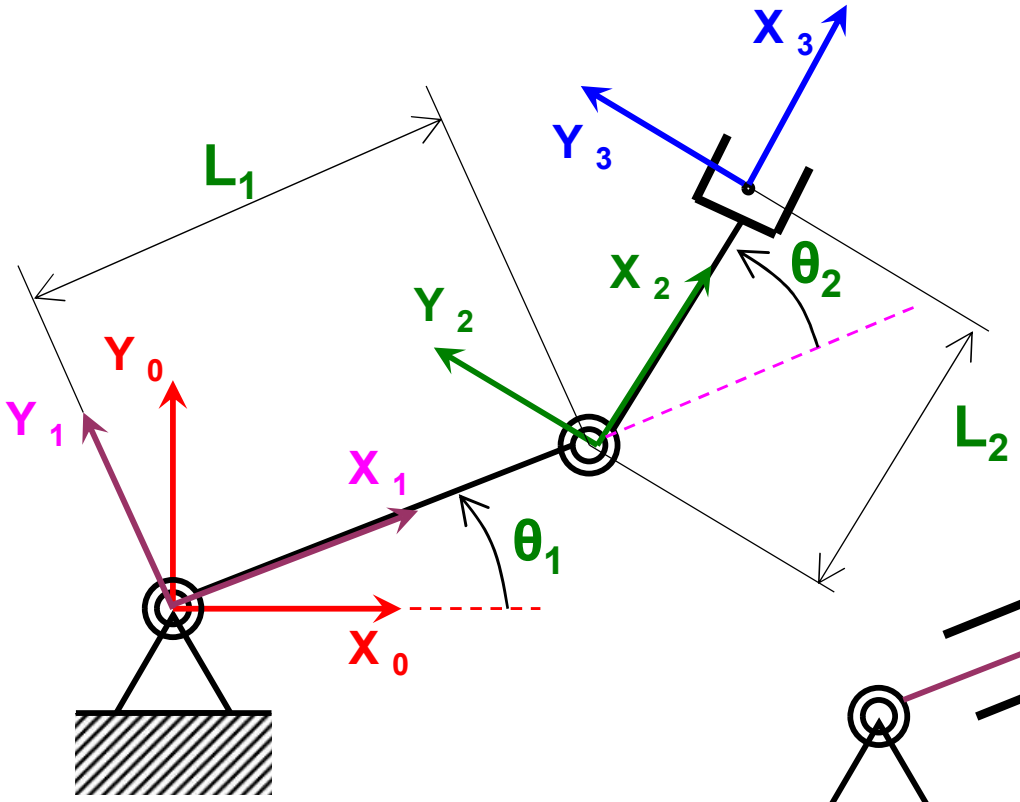
- Osobliwości graniczne przestrzeni roboczej

- Osobliwości wnętrza przestrzeni roboczej

Osobliwość jest zawsze związana z utratą jednego lub więcej stopni swobody.

Przykład osobliwości dla manipulatora 2-członowego

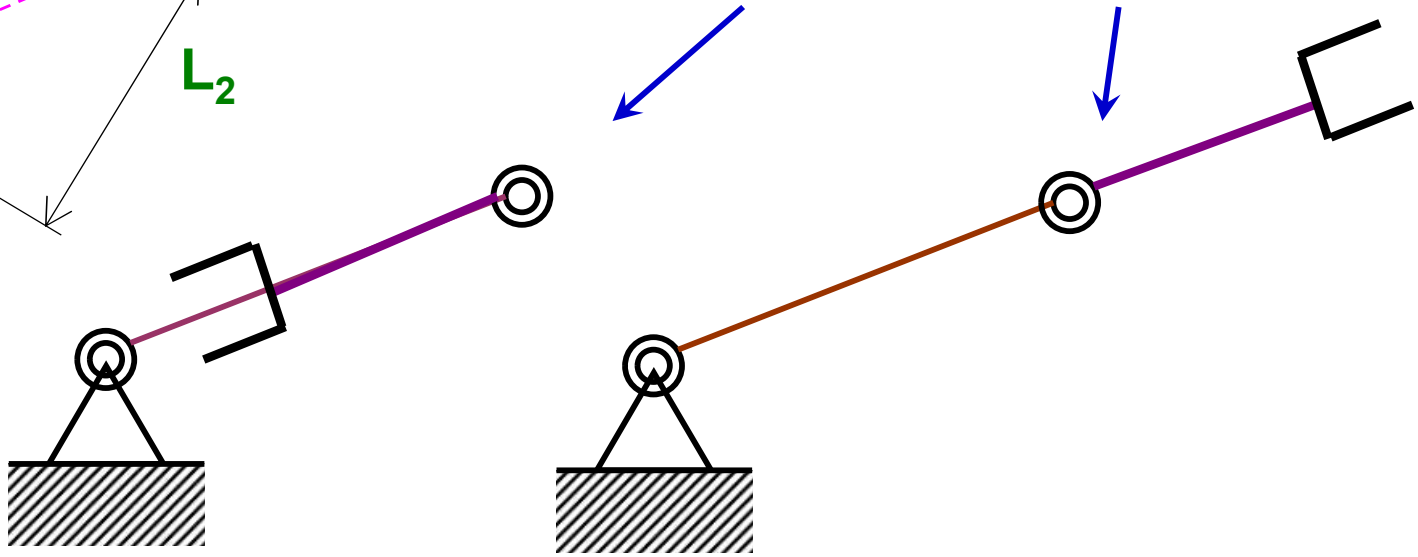
Gdzie znajdują się osobliwości takiego manipulatora?



$\det(J(\theta)) = L_1 \cdot L_2 \cdot \sin\theta_2 = 0$

czyli: $\sin\theta_2 = 0$

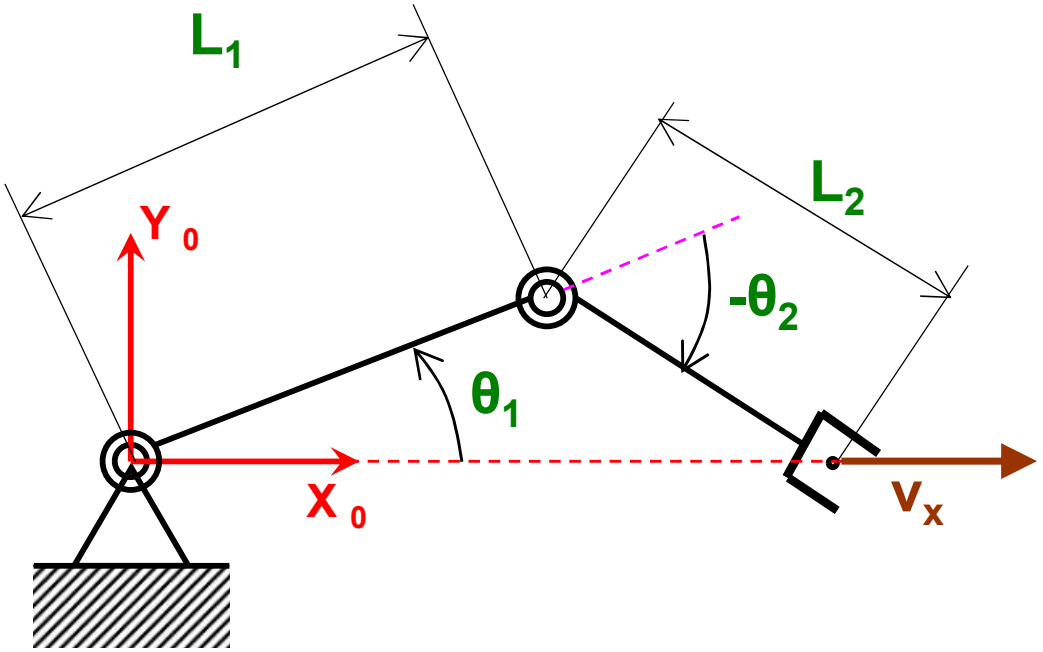
zatem: $\theta_2 = 180^o$ lub $\theta_2 = 0^o$



Ruch jest możliwy tylko w kierunku prostopadłym do ramienia o długości L_1, czyli mechanizm stracił 1 stopień swobody

Prędkości obrotowe przegubów w pobliżu osobliwości manipulatora 2-członowego

Końcówka robocza przemieszcza się wzdłuż osi X_0 z prędkością v_x



Jak zmieniają się prędkości obrotowe członów w zależności od wartości zmiennych konfiguracyjnych?

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} = {}^0J^{-1}(\theta)\cdot\begin{bmatrix}v_x\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{L_1\sin\theta_2} & \dfrac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{L_1\sin\theta_2}\\ -\dfrac{\cos\theta_1}{L_2\sin\theta_2}-\dfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{L_1\sin\theta_2} & -\dfrac{\sin\theta_1}{L_2\sin\theta_2}-\dfrac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{L_1\sin\theta_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_x\\ 0\end{bmatrix}$$

Prędkości obrotowe przegubów w pobliżu osobliwości manipulatora 2-członowego

Stąd:

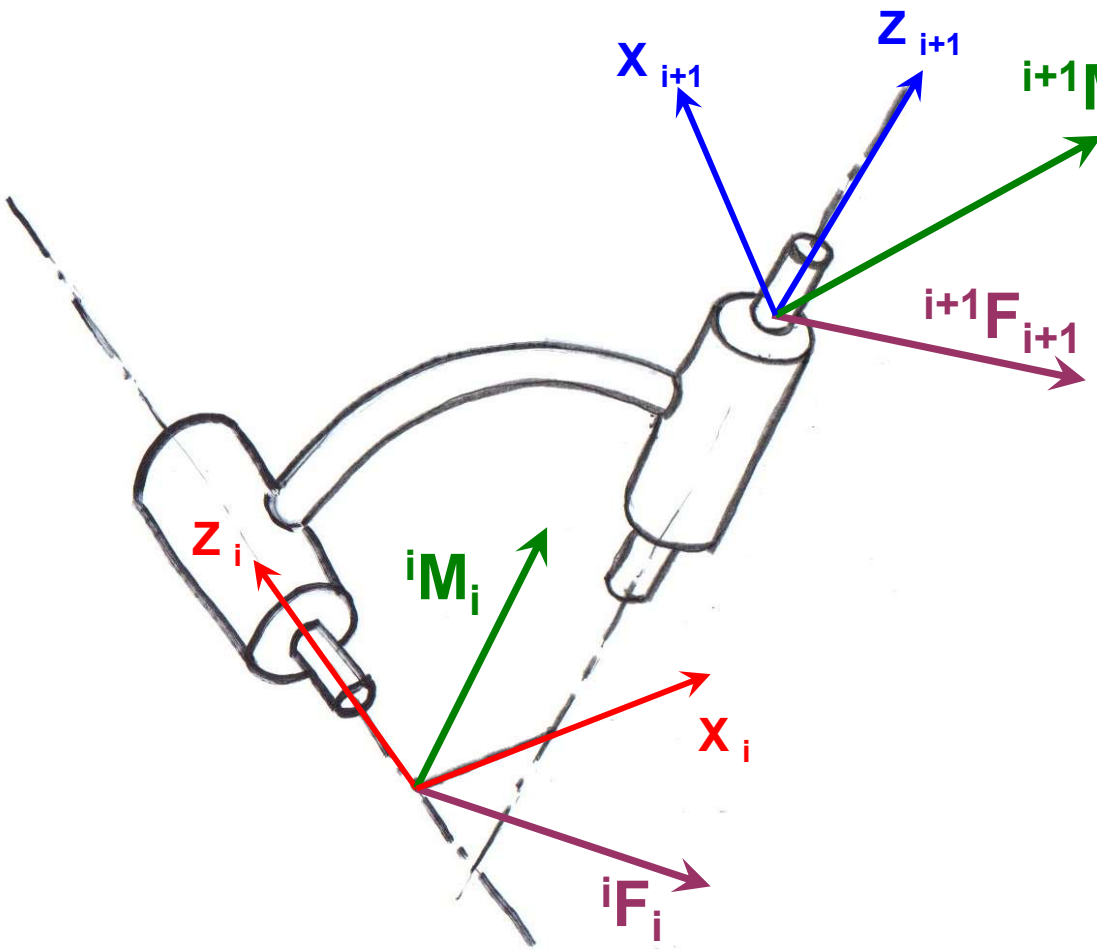
$$\dot{\theta}_1 = V_x \cdot \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{L_1 \sin\theta_2}$$

$$\dot{\theta}_2 = V_x \cdot \left(-\frac{\cos\theta_1}{L_2 \sin\theta_2} - \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{L_1 \sin\theta_2}\right)$$

W pobliżu osobliwości (dla $\theta_2 \to 0$) jest:

$$\lim_{\theta_2 \to 0^-} \dot{\theta}_1 = -\infty \qquad \lim_{\theta_2 \to 0^-} \dot{\theta}_2 = \infty$$

Siły statyczne w manipulatorach



F_i – siła w przegubie „i”
M_i – moment siły w przegubie „i”

Z równowagi sumy sił i momentów działających na człon „i”:

$$\begin{cases} {}^iF_i - {}^iF_{i+1} = 0 \Rightarrow {}^iF_{i+1} = {}^iF_i \\ {}^iM_i - {}^iM_{i+1} - {}^iP_{i+1} \times {}^iF_{i+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$${}^iM_i = {}^iM_{i+1} + {}^iP_{i+1} \times {}^iF_{i+1}$$

$$\Downarrow$$

$${}^iM_i = {}^i_{i+1}R \cdot {}^{i+1}M_{i+1} + {}^iP_{i+1} \times {}^iF_i$$

Ponadto: $${}^iF_i = {}^i_{i+1}R \cdot {}^{i+1}F_{i+1}$$

Siły statyczne w manipulatorach – c.d.

Znając siłę F_n i moment M_n którymi ostatni człon manipulatora oddziałuje na otoczenie, można – korzystając z wyprowadzonych wzorów – obliczyć siły F_{n-1} , F_{n-2} … i momenty M_{n-1} , M_{n-2} … w przegubach manipulatora, zapewniające równowagę statyczną. Istnienie tych sił jest częściowo rezultatem działania napędów. Siły i momenty rozwijane przez napędy poszczególnych przegubów oznaczamy τ_1, τ_2, τ_3 … τ_n.

Dla pary przesuwnej:

$$\tau_i = {}^iF_i \circ {}^i\hat{Z}_i = {}^iF_i^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

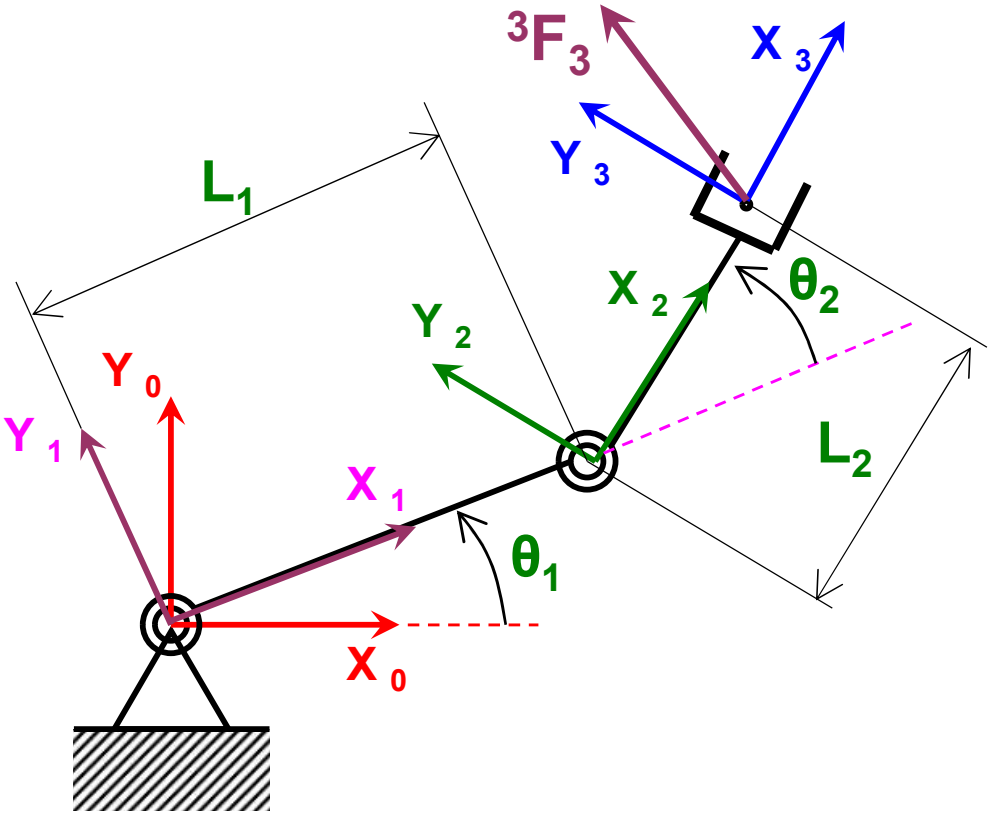
(jest to składowa f_z siły F_i)

Dla pary obrotowej:

$$\tau_i = {}^iM_i \circ {}^i\hat{Z}_i = {}^iM_i^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(jest to składowa m_z momentu M_i)

Przykład: siły statyczne w manipulatorze dwuczłonowym



Człon roboczy niech oddziałuje na otoczenie siłą $^3F_3$ o składowych f_x, f_y:

$$^3F_3 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ^3M_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obliczamy rozwijane momenty sił napędowych w przegubach „1” i „2”, w warunkach równowagi statycznej. Poprzednio stwierdzono, że:

$$^0P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ^1P_2 = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ^2P_3 = \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ^0_1R = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^1_2R = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^2_3R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład: siły statyczne w manipulatorze dwuczłonowym – c.d.

$$ {}^2F_2 = {}^2_3R \cdot {}^3F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} fx \\ fy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fx \\ fy \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2M_2 = {}^2_3R \cdot {}^3M_3 + {}^2P_3 \times {}^2F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fx \\ fy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \cdot fy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \cdot fy \end{bmatrix} $$

$$ {}^1F_1 = {}^1_2R \cdot {}^2F_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} fx \\ fy \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fx \cdot \cos\theta_2 - fy \cdot \sin\theta_2 \\ fx \cdot \sin\theta_2 + fy \cdot \cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1M_1 = {}^1_2R \cdot {}^2M_2 + {}^1P_2 \times {}^1F_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \cdot fy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fx \cdot \cos\theta_2 - fy \cdot \sin\theta_2 \\ fx \cdot \sin\theta_2 + fy \cdot \cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \cdot fy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \cdot fx \cdot \sin\theta_2 + L_1 \cdot fy \cdot \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \cdot fx \cdot \sin\theta_2 + L_1 \cdot fy \cdot \cos\theta_2 + L_2 \cdot fy \end{bmatrix} $$

Przykład: siły statyczne w manipulatorze dwuczłonowym – c.d.

Zatem potrzebne momenty sił napędowych w przegubach:

$$\begin{cases} \tau_1 = {}^1M_1 \circ {}^1\hat{Z}_1 = f_x \cdot L_1 \cdot \sin\theta_2 + f_y \cdot (L_1 \cdot \cos\theta_2 + L_2) \\ \tau_2 = {}^2M_2 \circ {}^2\hat{Z}_2 = L_2 \cdot f_y \end{cases}$$

albo:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cdot \sin\theta_2 & L_1 \cdot \cos\theta_2 + L_2 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Można zauważyć, że występuje tu macierz transponowana jakobianu ^3J. Czy to przypadek? Przekonamy się, że nie.

Jakobiany w dziedzinie siły

Zasada prac przygotowanych:

$$F \circ dX = \tau \circ d\theta$$ (iloczyny skalarne)

F – wektor 6×1 „siła – moment siły" rozwijany przez człon roboczy
T – wektor n×1 sił i momentów napędowych w połączeniach ruchowych
(n – liczba połączeń ruchowych)
dX – nieskończenie małe przemieszczenie kartezjańskie
dθ – nieskończenie małe przemieszczenie w połączeniach ruchowych

Zastępując iloczyn skalarny mnożeniem macierzy otrzymujemy:

$$F^T \cdot dX = \tau^T \cdot d\theta$$

Ponieważ – jak pokazano wcześniej: $dX = J(\theta) \cdot d\theta$

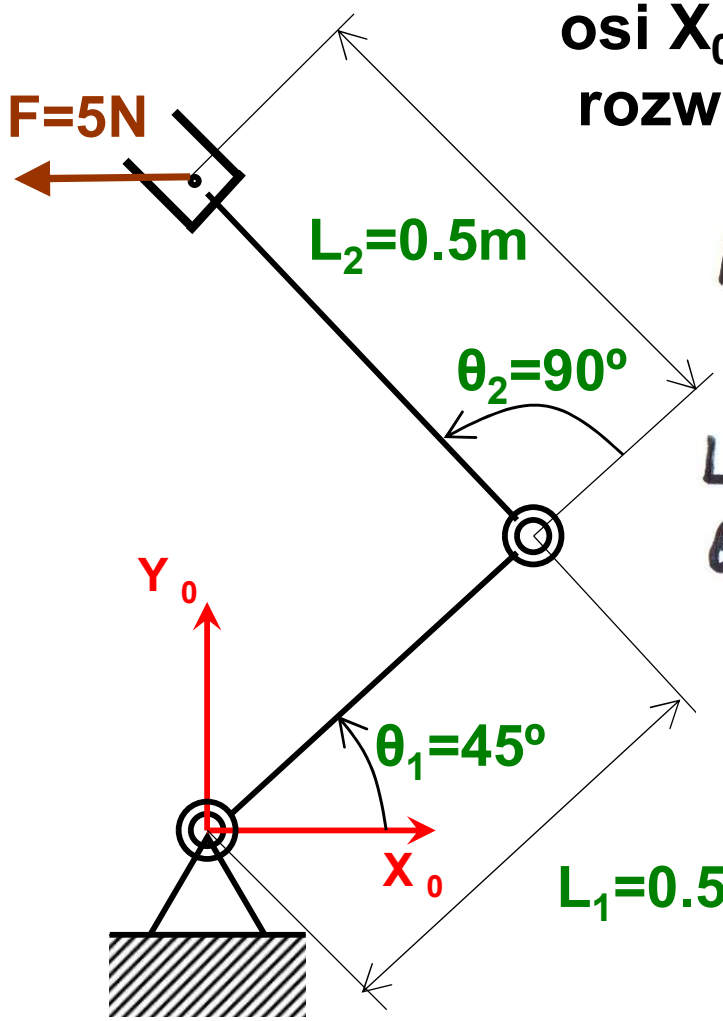
więc: $F^T \cdot J \cdot d\theta = \tau^T \cdot d\theta$ **czyli:** $F^T \cdot J = \tau^T$

Transponując obie strony równania otrzymujemy:

$$\tau = (F^T \cdot J)^T = J^T \cdot (F^T)^T = J^T \cdot F$$

Obliczenie momentów napędowych za pomocą jakobianu – przykład

Chwytak manipulatora jak na rysunku działa siłą 5N przeciwnie do osi X_0. Obliczyć momenty napędowe w przegubach, rozwijane w warunkach równowagi statycznej



$$F=\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix} \quad {}^0J=\begin{bmatrix}-L_1\sin\theta_1-L_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2) & L_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$$

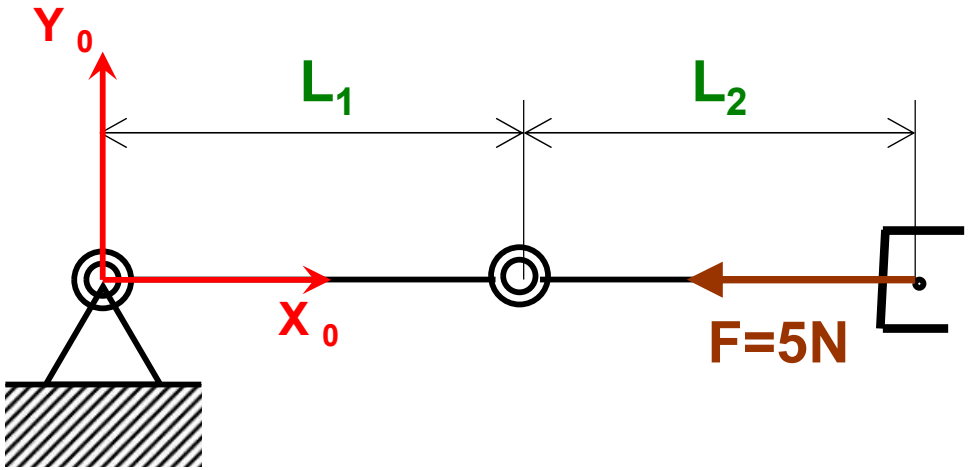
$$L_1=L_2=0{,}5\text{m},\ \theta_1=45^\circ,\ \theta_2=90^\circ \Rightarrow {}^0J=\begin{bmatrix}-0{,}5\cdot\sin45^\circ-0{,}5\cdot\sin135^\circ & -0{,}5\cdot\sin135^\circ\\ 0{,}5\cdot\cos45^\circ+0{,}5\cdot\cos135^\circ & 0{,}5\cdot\cos135^\circ\end{bmatrix}$$

$${}^0J=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix} \Rightarrow {}^0J^T=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \tau_1=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\ [\text{N}\cdot\text{m}],\quad \tau_2=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}\ [\text{N}\cdot\text{m}]$$

Osobliwości a siły statyczne

W osobliwościach przełożenie mechanizmu może dążyć do nieskończoności. Rozważmy ostatni przykład dla zmiennych konfiguracyjnych $\theta_1=0^o$ i $\theta_2=0^o$



$$ {}^0J = \begin{bmatrix} -0{,}5\cdot\sin 0^\circ - 0{,}5\cdot\sin 0^\circ & -0{,}5\cdot\sin 0^\circ \\ 0{,}5\cdot\cos 0^\circ + 0{,}5\cdot\cos 0^\circ & 0{,}5\cdot\cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^0J^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} $$

$$ \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \tau_1 = 0 \quad \tau_2 = 0 $$

W pobliżu osobliwości momenty τ_1 i τ_2 bliskie zera umożliwiają wywarcie siły dowolnie wielkiej

Przesłanki stosowania robotów w przemyśle

- Zastąpienie człowieka przy pracach niebezpiecznych
- Odsunięcie człowieka od pracy w warunkach szkodliwych dla zdrowia (np. szkodliwe pyły i gazy)
- Zastąpienie człowieka przy pracach uciążliwych (wysoka temperatura, przenoszenie przedmiotów o dużej masie lub niewystarczająco ergonomicznych kształtach)
- Zastąpienie człowieka przy realizacji zajęć monotonnych i mało twórczych
- Większa precyzja i powtarzalność zadań realizowanych przez roboty w stosunku do pracy ręcznej
- Konieczność zwiększenia wydajności poprzez zapewnienie ciągłej pracy całodobowej
- Eliminacja wysokich kosztów ludzkiej siły roboczej
- Zapewnienie elastyczności zautomatyzowanej produkcji małoseryjnej

Typowe zadania robotów przemysłowych

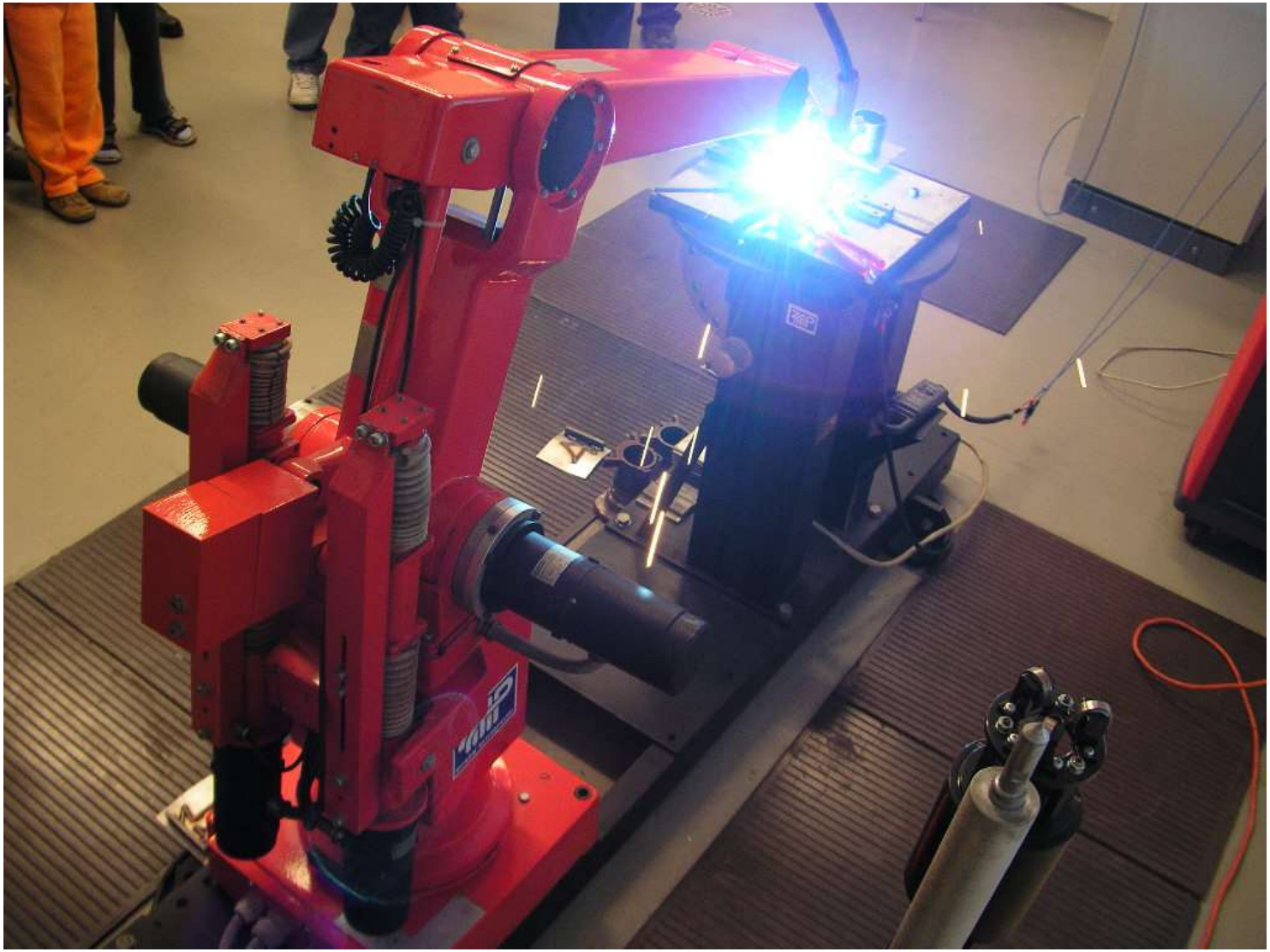
- Spawanie łukowe
- Zgrzewanie punktowe
- Obsługa linii pras
- Obsługa obrabiarek skrawających
- Obsługa stanowisk kucia na gorąco
- Montaż
- Paletyzacja
- Lakierowanie i nanoszenie powłok

W każdym z wymienionych przypadków warto się zastanowić, jakimi cechami powinien się charakteryzować robot i układ sterowania robota np. czy powinien on być w stanie realizować interpolację, dokładne sterowanie prędkością bądź sterowanie przyspieszeniem.

Typowe zadania robotów przemysłowych – c.d.

Spawanie łukowe:

- Współpraca układu sterowania robota z urządzeniami peryferyjnymi np. stołami podziałowymi
- Układ sterowania najczęściej powinien zapewniać interpolację (liniową, kołową)
- Przeważnie stosuje się roboty o strukturze kinematycznej antropoidalnej (z przegubami obrotowymi)



Typowe zadania robotów przemysłowych – c.d.

Zgrzewanie punktowe

- Stosuje się roboty o strukturze kinematycznej antropoidalnej
- Realizacja interpolacji przez układ sterujący nie jest konieczna

Obsługa linii pras

- Robotyzacja linii pras umożliwia odsunięcie ludzi ze strefy zagrożenia (zagrożenie wypadkiem, hałas, drgania)
- Następuje zwiększenie wydajności produkcji dzięki eliminacji zbędnych ruchów oraz synchronizacji działania robotów i pras
- Zwiększone są wymagania dotyczące powtarzalności kształtu materiału wyjściowego
- W przypadku niesztywnego materiału wyjściowego, większą rolę odgrywa programowanie prędkości, a nawet przyspieszeń urządzeń manipulacyjnych

Typowe zadania robotów przemysłowych – c.d.

Obsługa obrabiarek skrawających

- Zadaniem robota jest zazwyczaj podawanie i odbieranie przedmiotów obrabianych
- Robot może obsługiwać kilka obrabiarek
- W zależności od geometrii i ciężaru przenoszonych przedmiotów oraz rozplanowania gniazda, stosuje się roboty bramowe lub roboty o strukturze kinematycznej antropoidalnej
- Układ sterowania robota musi się komunikować z obrabiarkami i urządzeniami pomocniczymi

Typowe zadania robotów przemysłowych – c.d.

Obsługa stanowisk kucia na gorąco

- Robotyzacja jest związana z uciążliwością obsługi tych stanowisk przez człowieka (gorąco, hałas, drgania)
- Robot zapewnia szybsze przenoszenie ciężkich przedmiotów (ma to znaczenie ze względu na ich stygnięcie)
- Niskie wymagania co do dokładności pozycjonowania
- Wysokie wymagania co do udźwigu oraz prędkości działania
- Konieczna jest synchronizacja nagrzewu wsadu i pracy robota

Montaż i paletyzacja

- Szerokie spektrum stosowanych robotów w zależności od zadania montażowego
- Często realizowane są zadania typu „pick and place”, do czego szczególnie przydatne są roboty o strukturze kinematycznej typu SCARA (Selectively Compliant Assembly Robot Arm)

Typowe zadania robotów przemysłowych – c.d.

Lakierowanie i nanoszenie powłok

- **Robotyzacja umożliwia odsunięcie człowieka ze strefy dużej szkodliwości dla zdrowia**
- **Ze względu na złożone trajektorie ruchu efektora robota oraz duże znaczenie właściwej prędkości, układ sterowania robota powinien umożliwiać tzw. programowanie ciągłe, będące odmianą programowania przez uczenie**